数学分析曲线曲面积分习题课讲义

王若言（数学科学学院，PB21010441）

2024.5.29

1 曲线积分

1.1 两类曲线积分的关系

坐标微元 $\mathrm{d}r = \tau \mathrm{d}s$, 其中 τ 为曲线沿指定方向的单位切向. 因而有

$$\int_\Gamma F(x) \cdot \mathrm{d}r = \int_\Gamma (F(x) \cdot \tau) \mathrm{d}s.$$

对于空间曲线 Γ, 设 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 是切方向余弦, 则

$$\int_\Gamma P \ \mathrm{d}x + Q \ \mathrm{d}y + R \ \mathrm{d}z = \int_\Gamma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\mathrm{d}s.$$

当 Γ 为平面曲线时, 取法线的方向 n 与切线的方向 τ 的夹角 $\angle(n,\tau) = \frac{\pi}{2}$, 见图 1, 则

$$\angle(x,n) = \angle(x,\tau) + \angle(\tau,n) = \alpha - \frac{\pi}{2},$$

即

$$\cos\alpha = -\sin(x,n), \quad \sin\alpha = \cos(x,n).$$

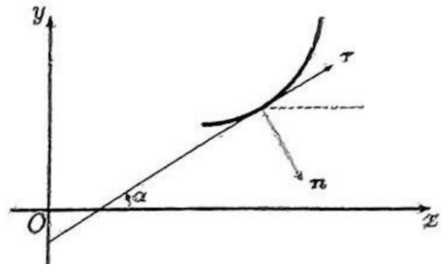

图 1:

于是 Γ 为平面曲线时

$$\int_\Gamma P\ \mathrm{d}x + Q\ \mathrm{d}y = \int_\Gamma (-P\sin(x,n) + Q\cos(x,n)]\mathrm{d}s.$$

1.2 Green 公式

设 D 是 $\mathbf{R}^2$ 内的一个有界闭区域, 其边界 ∂D 由光滑曲线或逐段光滑曲线组成. 又设函数 P,Q 在 D 上有关于自变量 x 和 y 的连续偏导数, 则下列 Green 公式成立:

$$\iint_D \left(-\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \oint_{\partial D} P\ \mathrm{d}x + Q\ \mathrm{d}y$$

其中 ∂D 的方向关于 D 是正向的. 由平面上两类曲线积分之间的关系知, Green 公式又可以写为

$$\begin{aligned}\iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y &= \oint_{\partial D} -Q\ \mathrm{d}x + P\ \mathrm{d}y \\ &= \oint_{\partial D} [Q\sin(x,\boldsymbol{n}) + P\cos(x,\boldsymbol{n})]\mathrm{d}s\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 是 ∂D 上的单位外法向量. 利用 $\angle(x,n) = \angle(x,y) + \angle(y,n) = \frac{\pi}{2} + \angle(y,n)$ (参见图 1), 则

$$\iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \oint_{\partial D} [P\cos(x,\boldsymbol{n}) + Q\cos(y,\boldsymbol{n})]\mathrm{d}s.$$

公式 (24.9), (24.10) 给我们提供了间接求平面上曲线积分的方法, 即利用 Green 公式将曲线积分化为二重积分, 即使曲线 C 不封闭, 也可以采用添加"辅助线"的方法去做.

关于两类曲线积分的关系，最基本的关系式在平面上也是正确的，但是在乎面上常用的是法方向，不是切方向。

关于 Green 公式, 比较方便于记忆们形式是

$$\oint_{\partial D} P\ \mathrm{d}x + Q\ \mathrm{d}y = \iint_D \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$$

1.3 学习要点

(1) 写出曲线的参数方程

本章的重点之一是计算两型曲线积分, 从计算公式可以发现写出道线的参数方程是计算的关键部分. 一般来说, 一条曲线可以有多秘参数方屋的形式, 到底哪一种给计算带来方便, 要视具体情况. 对如何求曲线的参数方程总结如下.

平面曲线

$$F(x,y)=0.$$

方法 1: 若能从 (24.17) 中解出 $y=f(x)$ 或 $x=g(y)$, 则平面曹线 (24.17) 以 x 或 y 为参数的参数方程分别为 F

$$x=x,\quad y=f(x)$$

或

$$x=g(y),\quad y=y.$$

方法 2: 将极坐标表达式 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ 代入 F(x, y)=0 得

$$F(r\cos\theta, r\sin\theta)=0$$

若能从上市中解出 $r=f(\theta)$ 或 $\theta=g(R)$，那么曲线的参数方程为

$$x=f(\theta)\cos\theta,\quad y=f(\theta)\sin\theta$$

空间曲线

$$F(x,y,z)=0,\quad G(xy,z)=0.$$

方法 1：能从上式中解出两个字母，不妨设可解出认为 y,z 为 x 的函数，则参数方程为

$$x=x, y=\varphi(x), z=\psi(x).$$

方法 2：用球坐标或者柱坐标变换

$$F(r\sin\varphi\cos\theta, r\,\mathrm{ain}\,\varphi\sin\theta, r\cos\varphi) = 0,$$
$$G(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi) = 0$$

或者

$$E(r\cos\theta, r\sin\theta, z) = 0$$
$$G(r\cos\theta, r\sin\theta, z) = 0$$

解出两个字母为第三个字母的函数，网杯也可以得到参数方程。方法 3: 从（24.18）中消去一个字母（例如 z)，得一条平面曲线

$$f(x,y) = 0.$$

实际上展空间出线在 zOy 平面上的投影，先写出平面曲线的参数方程

$$x = \varphi(t), \quad \eta = \psi(t),$$

代入空间曲线的某一个方程，得

$$z = w(t).$$

就有空间曲线的参数方程。

（2）第二型曲线积分求法

总结求平面上第二型曲线积分 $\int_C P\ \mathrm{d}x + Q\ \mathrm{d}y$ 的几种方法:
1. 用 Green 公式化为二重积分. 若 C 为闭曲线, 可直接用, 若 C 不闭可添加辅助线后用 Green 公式;
2. 若满足 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, 如果曲线 C 不封闭，可考虑用求出原函数的方法;
3. 利用曲线的参数方程化为定积分求解.

1.4 补充题

1. 证明不等式

$$\left|\int_C P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y\right| \le ML$$

其中 L 是曲线 C 的弧长, $M=\max_{(x,y)\in C}\left\{\sqrt{P^2(x,y)+Q^2(x,y)}\right\}$, 并利用这个不等式证明 $\lim_{R\to+\infty} I_R=0$, 其中

$$I_R=\oint_{x^2+y^2=R^2}\frac{y\ \mathrm{d}x-x\ \mathrm{d}y}{\left(x^2+xy+y^2\right)^2}$$

【解】由两类积分的关系及 Cauchy 不等式可知

$$\begin{aligned}\left|\int_C P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y\right| &= \left|\int_C [P(x,y)\cos\alpha+Q(x,y)\cos\beta]\mathrm{d}s\right| \\ &\le \int_C |P(x,y)\cos\alpha+Q(x,y)\cos\beta|\mathrm{d}s \\ &\le \int_C \sqrt{\left[P^2(x,y)+Q^2(x,y)\right]\left[\cos^2\alpha+\cos^2\beta\right]\mathrm{d}s} \\ &\le M\int_C \ \mathrm{d}s=MIL\end{aligned}$$

$$P(x,y)=\frac{y}{\left(x^2+xy+y^2\right)^2},\quad Q(x,y)=-\frac{x}{\left(x^2+xy+y^2\right)^2}$$

$$P^2(x,y)+Q^2(x,y)=\frac{x^2+y^2}{\left(x^2+xy+y^2\right)}\le\frac{16}{\left(x^2+y^2\right)^3}$$

故有

$$|I_R|\le\frac{16}{R^3}\cdot 2\pi R=\frac{32\pi}{R^2}\to 0\quad(R\to+\infty)$$

2. 求第一型曲线积分

(1) $\int_{x^2+y^2=R^2}\ln\sqrt{(x-a)^2+y^2}\ \mathrm{d}s\quad(|a|\ne R)$

(2) $\int_{x^2+y^2=R^2}\ln\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\ \mathrm{d}s\quad(a^2+b^2\ne R^2)$.

【解】只计算 (2). 取 $b=0$ 得 (1).

$$\begin{aligned}I&=\int_{x^2+y^2=R^2}\ln\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\ \mathrm{d}s \\ &=R\int_0^{2\pi}\ln\sqrt{(R\cos\theta-a)^2+(R\sin\theta-b)^2}\ \mathrm{d}\theta \\ &=\frac{R}{2}\int_0^{2\pi}\ln\left[R^2-2aR\cos\theta-2bR\sin\theta+\left(a^2+b^2\right)\right]\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{R}{2}\int_0^{2\pi} \ln\left|R^2 - 2R\sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta+\varphi) + \left(a^2+b^2\right)\right| \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{R}{2}\int_0^{2\pi} \ln\left|R^2 - 2R\sqrt{a^2+b^2}\cos\theta + \left(a^2+b^2\right)\right| \mathrm{d}\theta \\
&= R\int_0^{\pi} \ln\left| R^2 - 2R\sqrt{a^2+b^2}\cos\theta + \left(a^2+b^2\right)\right] \mathrm{d}\theta \\
&= R\int_0^{\pi} \ln\left[1 - 2\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{R}\cos\theta + \frac{a^2+b^2}{R^2}\right] \mathrm{d}\theta + 2\pi R\ln R
\end{aligned}
$$

$$
I = \begin{cases} 2\pi R\ln R, & a^2+b^2 < R^2 \\ 2\pi R\ln\sqrt{a^2+b^2}, & a^2+b^2 > R^2 \end{cases}
$$

$\int_0^\pi \ln\left(1-2\alpha\cos x+\alpha^2\right)dx$ 叫 Poisson 积分，用代数方法较为麻烦。用含参变量积分很容易计算：

当 $|\alpha| \leq 1$ 时，

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\pi \ln\left(1-2\alpha\cos x+\alpha^2\right)dx \\
&= -2\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^\pi \frac{\alpha^n\cos nx}{n}dx = 0.
\end{aligned}
$$

当 $|\alpha| > 1$, 即当 $\left|\frac{1}{\alpha}\right| < 1$ 时,

$$
\begin{aligned}
\ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2) &= \ln\left[\alpha^2\left(1-2\frac{1}{\alpha}\cos x+\frac{1}{\alpha^2}\right)\right] \\
&= \ln\alpha^2 + \ln\left(1-\frac{2}{\alpha}\cos\alpha+\frac{1}{\alpha^2}\right)
\end{aligned}
$$

利用以上结果，即得当 $|\alpha| > 1$ 时

$$
\int_0^\pi \ln\left(1-2\alpha\cos x+\alpha^2\right)dx = \pi\ln\alpha^2 = 2\pi\ln|\alpha|.
$$

2 曲面积分

2.1 两类曲面积分之间的关系

设 S 是可定向曲面, $\boldsymbol{n}$ 是 S 上选定的某一侧的法向量, 则

$$\begin{aligned}&\iint_S P\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z+Q\ \mathrm{d}z\ \mathrm{d}x+R\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\\&\quad=\iint_S[P\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{x})+Q\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{y})+R\cos(\boldsymbol{n},z)]\mathrm{d}S.\end{aligned}$$

上述关系式的用处之一是可简化曲面积分的计算, 当某一类曲面积分的计算比较复杂时, 可转化为另一类曲面积分进行计算.
例: 求

$$I=\iint_\Sigma(y-z)\mathrm{d}y\ \mathrm{d}z+(z-x)\mathrm{d}z\ \mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y,$$

其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=2Rx$ 被柱面 $x^2+y^2=2rx(0<r<R)$ 截下的位于 $z\geq 0$ 的部分, 取外侧.

【解】改写球面方程为 $(x-R)^2+y^2+z^2=R^2$, 其外侧的法向量

$$\boldsymbol{n}=\left(\frac{x-R}{R},\frac{y}{R},\frac{z}{R}\right).$$

由两类积分关系, 有

$$\begin{aligned}I&=\iint_\Sigma(y-z,z-x,x-y)\cdot n\ \mathrm{d}S\\&=\frac{1}{R}\iint_\Sigma[(y-z)(x-R)+(z-x)y+(x-y)z]\mathrm{d}S\\&=\iint_\Sigma(z-y)\mathrm{d}S.\end{aligned}$$

由于 Σ 关于 xOz 平面对称, 而函数 y 是奇函数, 于是

$$\begin{aligned}I&=\iint_\Sigma z\ \mathrm{d}S=\iint_{x^2+y^2\leq 2rx}\sqrt{2Rx-x^2-y^2}\frac{R}{\sqrt{2Rx-x^2-y^2}}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\\&=R\cdot\pi r^2=\pi Rr^2.\end{aligned}$$

例: 求

$$I=\iint_\Sigma xyz\left(y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2\right)\mathrm{d}S$$

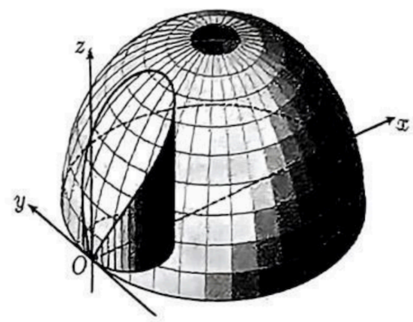

图 2:

其中 Σ 为第一卦限中的球面 $x^2+y^2+z^2=a^2(x\geq 0,y\geq 0,z\geq 0)$.
【解】不论用参数式或直角坐标式, 直接计算均相当复杂 (x,y,z) 处的单位外法向量为 $\left(\frac{x}{a},\frac{y}{a},\frac{z}{a}\right)$,

$$\begin{aligned}I&=a\iint_{\Sigma}\left(y^3z^3\frac{x}{a}+z^3x^3\frac{y}{a}+x^3y^3\frac{z}{a}\right)\mathrm{d}S\\&=a\iint_{\Sigma}y^3z^3\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z+z^3x^3\ \mathrm{d}z\ \mathrm{d}x+x^3y^3\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\\&=3a\iint_{\Sigma}x^3y^3\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y=3a\iint_{D_{zy}}x^3y^3\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y_1\end{aligned}$$

其中 $D_{xy}=\{x^2+y^2\leq a^2,x\geq 0,y\geq 0\}$, 作极坐标变换得

$$\begin{aligned}I&=3a\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^a r^7\sin^3\theta\cos^3\theta\mathrm{d}r\\&=\frac{3}{64}a^9\int_0^{\pi/2}\sin^3 2\theta\mathrm{d}\theta=\frac{1}{32}a^9\end{aligned}$$

2.2 Gauss 公式

Gauss 公式是将 R^3 中某区域上的三重积分与这一区域的边界上特定的曲面积分建立联系的一个重要公式.

设 D 是 $\mathbf{R}^3$ 内的一个有界区域, 其边界 ∂D 由光滑曲面或逐片光滑曲面组成, 方向是外侧 (相对于区域 D 而言). 又设函数 P,Q,R 都在 D 上有关于 x,y,z 的连续偏导数, 则成立下列 Gauss 公式:

$$\iiint_D\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z=n\iint_{\partial D}P\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z+Q\ \mathrm{d}z\ \mathrm{d}x+R\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y.$$

利用两类曲面积分之间的关系, Gauss 公式也可以写成

$$\begin{aligned}&\iiint_D\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z\\=&\iint_{\partial D}(P\cos(n,x)+Q\cos(n,y)+R\cos(\boldsymbol{n},z))\mathrm{d}S,\end{aligned}$$

其中 n 为曲面 ∂D 上的外法向量.

可以看出, Green 公式与 Gauss 公式的表达形式是类似的, 仅仅是空间的维数不同而已.

与 Green 公式相仿, Gauss 公式为我们提供了一种新的计算曲面积分的方法.

2.3 Stokes 公式

Stokes 公式是将空间曲面上的第二型曲面积分与该曲面边界上的第二型曲线积分之间建立联系的一个重要公式.

设 D 是 $\mathbf{R}^3$ 中的分片光滑曲面, D 的边界 ∂D 由分段光滑曲线组成, 又设 P,Q,R 有关于 x,y,z 的连续偏导数, 则成立下列 Stokes 公式:

$$\oint_{\partial D}P\ \mathrm{d}x+Q\ \mathrm{d}y+R\ \mathrm{d}z=\iint_D\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\ \mathrm{d}z & \mathrm{d}z\ \mathrm{d}x & \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix},$$

其中 ∂D 的方向和 D 的方向服从右手法则. 由两类曲面积分之间的关系 (25.4), (25.12) 又可以写为

$$\oint_{\partial D}P\ \mathrm{d}x+Q\ \mathrm{d}y+R\ \mathrm{d}z=\iint_D\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}\mathrm{d}S,$$

其中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 是曲面 D 上法向量的方向余弦. 如果曲面 D 在 xOy 平面上, 则 Stokes 公式就是 Green 公式. Stokes 公式给我们提供了一个求曲线积分与曲面积分的新方法.

2.4 第一类曲面积分在正交变换下的不变性

第一类曲面积分在正交变换下的不变性, 即

$$\iint_S f(\boldsymbol{X})\mathrm{d}S=\iint_\Sigma f\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}\right)\mathrm{d}\Sigma,$$

其中 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \boldsymbol{U}=\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵. 满足

$$U = A\boldsymbol{X},$$

$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的转置. 曲面 Σ 是曲面 S 在正交变换 $\boldsymbol{A}$ 下的像.
证明：公式 (25.18) 的证明如下: 设 S 的参数方程为

$$S: x=x(s,t), y=y(s,t), z=z(s,t), \quad (s,t)\in D.$$

Σ 的参数方程为

$$\Sigma: u=u(s,t), v=v(s,t), w=\psi(s,t), \quad (s,t)\in D,$$

则

$$\iint_S f(\boldsymbol{X})\mathrm{d}S = \iint_D f(\boldsymbol{X}(s,t))\sqrt{EG-F^2}\ \mathrm{d}s\mathrm{dt},$$
$$\iint_\Sigma f\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}U\right)\mathrm{d}\Sigma = \iint_D f\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}U(s,t)\right)\sqrt{E_1G_1-F_1^2}\ \mathrm{d}s\mathrm{dt},$$

其中

$$E=X_s^2, \quad F=X_s\cdot X_t, \quad G=X_t^2,$$
$$E_1=U_s^2, \quad F_1=U_s\cdot U_t, \quad G_1=U_t^2,$$

由 $U=AX$ 得

$$U_s=AX_s, \quad U_l=AX_l.$$

从而

$$E=E_1, F=F_1, G=G_1,$$

例：设 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=1, f$ 是连续函数, 求证:

$$\iint_S f(ax+by+cz)\mathrm{d}S = 2\pi\int_{-1}^{1} f\left(u\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right)\mathrm{d}u,$$

其中 a,b,c 是常数.

【证】不妨设 $a^2+b^2+c^2\neq 0$, 设 $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, 其中矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为正交

知阵, 且 A 的第一行的元素为 $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$. 由第一类曲线积分在正交变换下的不变性知

$$\begin{aligned}
&\iint_S f(ax+by+cz)\mathrm{d}S = \iint_{u^2+v^2+w^2=1} f\left(u\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right)\mathrm{d}S \\
=&2\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} f\left(u\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right)\frac{1}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v \\
=&4\int_{-1}^{1} f\left(u\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right)\mathrm{d}u\int_0^{\sqrt{1-u^2}}\frac{dv}{\sqrt{1-u^2-v^2}} \\
=&4\int_{-1}^{1} f\left(u\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right)\mathrm{d}u\int_0^{\pi/2}\ \mathrm{d}t \quad \left(v=\sqrt{1-u^2}\sin t\right) \\
=&2\pi\int_{-1}^{1} f\left(u\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right)\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

2.5 球面上的曲面积分

若曲面 S 是以 $M_0=(x_0,y_0,z_0)$ 为球心, r 为半径的球面 $\partial B_r(M_0)$, 则其参数方程为

$$x=x_0+r\sin\varphi\cos\theta, y=y_0+r\sin\varphi\sin\theta,\quad z=z_0+r\cos\varphi,$$
$$0\le\theta\le 2\pi,\quad 0\le\varphi\le\pi.$$

由此计算出

$$E=x_\theta^2+y_\theta^2+z_\theta^2=r^2\sin^2\varphi$$
$$F=x_\theta x_\varphi+y_\theta y_\varphi+z_\theta z_\varphi=0$$
$$G=x_\varphi^2+y_\varphi^2+z_\varphi^2=r^2$$

于是

$$\sqrt{EG-F^2}=r^2\sin\varphi.$$

与直角坐标系中三重积分化为球坐标积分的 Jacobí 行列式一样, 但这里的 r 是常数. 于是

$$\begin{aligned}
&\iint_{\partial B_r(M_0)} f(x,y,z)\mathrm{d}S_r \\
=&\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f\left(x_0+r\sin\varphi\cos\theta, y_0+r\sin\varphi\sin\theta, z_0+r\cos\varphi\right)r^2\sin\varphi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi,
\end{aligned}$$

其中 $\mathrm{d}S_r$ 是半径为 r 的球面的面积元. 从上面的计算可以看出

$$\mathrm{d}S_r=r^2\sin\varphi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$
$$\mathrm{d}S_1=\sin\varphi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

于是就有

$$\mathrm{d}S_r = r^2\ \mathrm{d}S_1$$

如果记

$$\sin\varphi\cos\theta = \alpha_1,\quad \sin\varphi\sin\theta = \alpha_2,\quad \cos\varphi = \alpha_3,$$

注意这里 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 都是 φ,θ 的函数, 则上面的积分可改写为

$$\begin{aligned}\iiint_{aB_r(MQ)} f(x,y,z)dS_r &= \iint_{\partial B_r(0)} f\left(x_0+r\alpha_1, y_0+r\alpha_2, \infty_0+r\alpha_3\right)dS_r\\ &= r^2\iiint_{\partial B_3(0)} f\left(x_0+r\alpha_1, \Psi_0+r\alpha_2, z_0+r\alpha_3\right)dS_2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\iint_{\partial B_r(M_0)} f(x,y,z)\mathrm{d}S_r &= \iint_{\partial B_r(0)} f\left(M_0+r_R\right)\mathrm{d}S_r\\ &= \tau^2\iint_{\partial B_1(0)} f\left(M_0+rn\right)\mathrm{d}S_1.\end{aligned}$$

例题 25.5 .3 设 $B_r(M_0)$ 是以 $M_0=(x_0,y_0,z_0)$ 为术, r 为半径的球，$\partial B_r(M_0)$ 是以 $M_0=(x_0,\Psi_0,z_0)$ 为心, r 为半径的球面，证明: (1) $\iiint_{B_r(M_0)} f(x,y,z)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z = \int_0^T\iint_{\partial B_\rho(M_0)} f(x,y,z)\mathrm{d}S_p\ \mathrm{d}\rho$, (2) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\iiint_{B_\tau(M_0)} f(x,y,z)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z = \iint_{\partial B_r(M_0)} f(x,y,z)\mathrm{d}S_r$ 证只证 (1), 图为在 (1) 的两分对 τ 求导便量到 (2).
作牲坐标变获

$$\begin{gathered}x=x_0+\rho\sin\varphi\cos\theta, y=y_0+\rho\sin\varphi\sin\theta,\quad z=z_0+\rho\cos\varphi,\\ 0\le\theta\le 2\pi,\quad 0\le\varphi\le\pi,\quad 0\le\rho\le r.\end{gathered}$$

则

$$\begin{aligned}&\iiint_{B_r(M_0)} f(x,y,z)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z\\ &=\int_0^T\int_0^\pi\int_0^{2\pi} f\left(x_0+\rho\sin\varphi\cos\theta, y0+\rho\sin\varphi\sin\theta, z_0+\rho\cos\varphi\right)\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\rho\\ &=\int_0^T\iint_{\partial B_\rho(M_0)} f(x,y,z)\mathrm{d}S_\rho\mathrm{d}\rho.\end{aligned}$$

在球面上的曲面积分看似简单, 实际上有很多技巧.

(1) 若把球心移到坐标原点, 用球坐标系中的 θ,φ 作为球面的参数方程中的参数时, 向量 $(\sin\varphi\cos\theta,\sin\varphi\sin\theta,\cos\varphi)$ 的长度为 1 , 方向与该点的

矢径的方向相同, 因此它就是球面上的单位外法向量, 这在应用 Gauss 公式时带来一些运算上的方便.

(2) 球面的两个表达式

$$\iint_{\partial B_r(\mathbf{0})} f\left(M_0 + r\boldsymbol{n}\right) \mathrm{d}S_r, r^2 \iint_{\partial B_1(\mathbf{0})} f\left(M_0 + r\boldsymbol{n}\right) \mathrm{d}S_1$$

各有用处. 前者表达简捷, 但由于积分限与被积函数中都有 r, 因此需要对 r 求导数时, 用后者方便.

2.6 注意事项

1. 求空间第二型曲线积分 $\int_C P\ \mathrm{d}x + Q\ \mathrm{d}y + R\ \mathrm{d}z$ 的几种方法:

(1) 用 Stokes 公式化为第二型的面积分;

(2) 若满足 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$, 如果曲线 C 不封闭, 可考虑用求出原函数的方法;

(3) 利用曲线的参数方程化为定积分求解.

2. 求空间第二型曲面积分的几种方法:

(1) 用 Stokes 公式化为第二型曲线积分;

(2) 用 Gauss 公式化为三重积分;

(3) 利用曲面的参数方程化为二重积分求解, 要特别注意积分号前正负号的确定.

3. 计算第一型曲面积分一般都直接应用公式, 若计算过于复杂, 则可考虑利用两类曲面积分之间的关系转化为求第二型曲面积分.