第七次习题课讲义

于俊骜

2024 年 6 月 8 日

目录

1 第十二章复习 **3**
1.1 周期函数的 Fourier 展开 3
1.2 Fourier 级数的收敛性 4
1.3 Fourier 变换与逆变换 5

2 作业解答 **6**
2.1 习题 12.1.9 6
2.2 习题 12.2.2 6
2.3 习题 12.2.4(1) 7
2.4 习题 12.3.9 7
2.5 习题 12.4.1(3) 8
2.6 习题 12.4.2(1) 8

3 难题选讲 **9**
3.1 第 12 章综合习题 3 9
3.2 Riemann-Lebesgue 引理 * 9
3.3 第 12 章综合习题 8 10

4 拓展：Kitty, You Can Have Fourier Transform **11**
4.1 名副其实的逆变换 11
4.2 解方程！ 13
4.3 分离变量法 14

5 拓展：从 Gamma 函数到 Riemann 猜想（编辑于考试后） 15
5.1 复变函数与全纯函数 15
5.2 Gamma 函数的延拓 17
5.3 Zeta 函数的延拓 18

1 第十二章复习

1.1 周期函数的 Fourier 展开

“展开”的本质，是将一个不够好的东西表达成一些好的东西的线性组合。比如 (B1) 中的 Taylor 展开，可以将解析函数用幂函数表示，而 Lebesgue 积分理论允许我们把可积函数展开为特征函数。常数和三角函数是基本初等函数中唯一的周期函数，这就让我们猜测，是否可以将任何一个周期函数展开为三角函数。

一旦 $f(x)$ 能展开，那么三角函数就像是 $f(x)$ 的一组基。事实上确实如此，而且我们惊讶地发现，可以引入一种内积——乘起来积分，使得他们两两“垂直”。这种内积称为 L^2 内积，这是因为，它可以诱导出 L^2 范数。

L^2 空间，就是 L^2 范数有界的函数组成的空间。Cauchy 不等式保证任何两个 L^2 空间中的函数做内积的值是有限的。因此类似于欧氏空间中的分解

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

我们也将 $[-\pi, \pi]$ 上的 L^2 函数进行正交分解，得到 Fourier 展开

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

有限区间的函数复制一下，结合三角函数的周期性，我们最终就可以得到周期函数的 Fourier 展开。

注 1. 三角函数是 $L^2[a,b]$ 的正交基，但 a, b 不能为无穷。另一方面，它们未必是标准正交基。以 $L^2[a,b]$ 为了，这些基的“模长”是自身做内积再开根号。因此，除以模长后才是标准正交基。

回想欧氏空间中向量往各个坐标轴上分解，我们是将向量与对应的单位向量做内积，就得到了“分量”。而 Fourier 级数中的系数，也就是这些“分量”。但三角函数未必是标准正交基，所以做完内积后还需要除去模长。因此，以 $[-\pi, \pi]$ 为例

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \,\mathrm{d}x$$
$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \,\mathrm{d}x$$
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \,\mathrm{d}x$$

Fourier 的复数形式，在后续课程比三角形式用得多。一个是它类似等比级数，方便研究敛散性；另一个是便于引入一些复分析的理论。这里不用过多留意，因为复数形式可以通过三角形式直接算出。

1.2 Fourier 级数的收敛性

类似 Taylor 级数，Fourier 级数也是未必收敛的，更不用说收敛于自身了。所以做展开时，一定要写波浪线而非等号。

数学分析中见到的收敛性，只有收敛、一致收敛、平方平均收敛。这里的平方平均收敛就是 Lebesgue 积分意义下的 L^2 收敛。我们目前见到的收敛性都是“依范数收敛”，即两者的差的范数趋于零。比如数列的收敛就是依**绝对值**收敛，函数的逐点收敛就是依**最大模范数**收敛，而平方平均收敛是依 **$\mathbf{L}^2$ 范数**收敛。它们之间的不能说关系不大，只能说毫无关系。

因为 $L^1 \cap L^2$ （可积且平方可积）函数的 Fourier 级数是依 L^2 范数收敛的，而事实上 L^2 是个完备空间（柯西列一定收敛），所以它的极限是 L^2 函数。而 L^2 空间是有内积的，所以我们可以类似欧氏空间中的勾股定理

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

建立一种“无穷维版本”的勾股定理，即 **Parseval 等式**

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

其几何意义就是“模长平方等于各分量的平方和”。另外，由于三角多项式的完备性，我们完全不需要考虑 Bessel 不等式取不了等的情况。

为了让 Fourier 级数有更好的收敛性，我们可以用一个比较好的东西“带带它”。比如，数项级数的 Cesàro 收敛比普通的收敛要容易一些，所以我们也想对 Fourier 级数进行一个类似的操作——求和再取平均。

定义 1 (Dirichlet 核)**.** *函数*

$$D_N(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{N}\cos kx = \frac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}$$

称为 Dirichlet 核，它满足

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(x)\,dx = 1$$

利用 Dirichlet 核，我们就能证明 Dirichlet 定理，即

定理 1 (Dirichlet 定理)**.** *设周期函数 $f(x)$ 分段可微，则它的 Fourier 级数逐点收敛于*

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

进一步，若 $f(x)$ 连续，则该收敛关于 x 是一致的。

另外可以提一下，Fourier 级数是可以逐项积分的，但逐项求导需要验证一致收敛性。

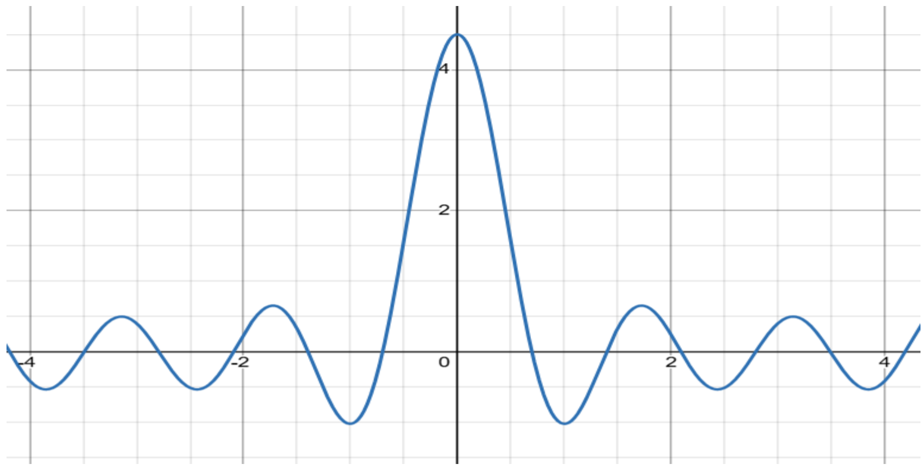

图 1: $N=4$ 时的 Dirichlet 核

1.3 Fourier 变换与逆变换

级数和积分的关系是很紧密的。在测度论的意义下，级数是一种特殊的积分；另一方面，Riemann 积分的分割求和取极限，说明积分也是离散求和的极限。因此，我们可以把 Fourier 级数推广到 Fourier 积分，将其“连续化”。此时，只要保证收敛性，那么积分的区域也不再局限于闭区间

$$f(x) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\lambda e^{i\lambda x} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-i\lambda\xi} \, \mathrm{d}\xi$$

Fourier 积分的看着像是“把 $f(x)$ 变回 $f(x)$”。它经过了两次积分，而所乘的项，其指数刚好差一个符号，就像是“正过去又反回来”。由此我们定义 Fourier 变换和逆变换

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ix\xi} \, \mathrm{d}x$$
$$\check{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{ix\xi} \, \mathrm{d}\xi$$

事实上，绝大多数函数正变换再逆变换，得到的并不是自身，这点我们会在拓展部分单独讨论。这也是为什么 Fourier 积分也要写**波浪线而非等号**。

本章 Fourier 变换会算就行，最多再知道它的卷积和求导性质

$$(f * g)^{\wedge}(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$$
$$(f'(x))^{\wedge}(\xi) = i\xi \hat{f}(\xi)$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\hat{f}(\xi) = (-ixf(x))^{\wedge}(\xi)$$

2 作业解答

2.1 习题 12.1.9

将 $f(x)$ 偶延拓为周期为 2π 的函数

$$\bar{f}(x)=\begin{cases}1+x, & 0\le x\le\pi\\ 1-x, & -\pi\le x<0\end{cases}$$

则

$$\begin{aligned}a_0&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\bar{f}(x)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1+x)\,\mathrm{d}x=2+\pi\\ a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\bar{f}(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1+x)\cos nx\,\mathrm{d}x\\ &=-\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x=-\frac{2}{n^2\pi}\left(1-(-1)^n\right)\end{aligned}$$

由 Dirichlet 定理，$-\pi\le x\le\pi$ 时恒有

$$\bar{f}(x)=1+\frac{\pi}{2}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^2}\cos nx=1+\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x$$

于是取 $x=1$，得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi}{4}$$

取 $x=4$，得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 4(2n-1)}{(2n-1)^2}=\bar{f}(4)=\bar{f}(4-2\pi)=\pi-\frac{3}{8}\pi^2$$

注 2. *对于非周期函数，Dirichlet 定理只能在“所展开的周期内”使用，一旦到了该周期外面，Fourier 级数未必收敛于函数自身。因此求值时先要用周期性将 x 转移到周期内。*

2.2 习题 12.2.2

证明. 由均值不等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{a_n}{n}\right|\le\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\le\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)+\frac{\pi^2}{6}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,\mathrm{d}x+\frac{\pi^2}{6}<+\infty$$

故该级数绝对收敛，从而收敛。另一级数同理。 □

注 3. *该题目是第 7 章一道课后题的直接推广。另外，这里也可以使用 Cauchy 不等式*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{a_n}{n}\right| \le \left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{6}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

2.3 习题 12.2.4(1)

证明. 注意到

$$\int_0^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x = 0$$

且 $m \neq n$ 时

$$\int_0^{\pi}\cos mx\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos(m+n)x\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos(m-n)x\,\mathrm{d}x = 0$$

这说明了正交性。

进一步

$$\int_0^{\pi}\mathrm{d}x = \pi \qquad \int_0^{\pi}\cos^2 nx\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi}\frac{1+\cos 2nx}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

因此，该正交系对应的标准正交系为

$$\left\{\sqrt{\frac{1}{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos x, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos 2x, \cdots\right\}$$

□

注 4. *常数和三角的模长是不一样的。三角做内积会搞“窝里斗”，抵消掉一部分，模长就会小。*

2.4 习题 12.3.9

证明. 取 $x=1$，得到

$$\frac{\pi-1}{2} = f(1) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin n}{n}\right)^2$$

不难验证其逐项求导后函数的一致收敛性，于是

$$\frac{\pi-1}{2} = f'(0) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}\cos nx\bigg|_{x=0} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}$$

另一方面，由 Parseval 等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^4} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi-1}{\pi}\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2\pi}\int_1^{\pi}(\pi-x)^2\,\mathrm{d}x = \frac{(\pi-1)^2}{6}$$

□

注 5. *Fourier* 级数的逐项积分是一定成立的，但逐项求导仍然是需要验证一致收敛性的。

2.5 习题 12.4.1(3)

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\lambda}\,\mathrm{d}\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)e^{-i\lambda\xi}\,\mathrm{d}\xi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\lambda}\,\mathrm{d}\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\lambda\xi}}{a^2+\xi^2}\,\mathrm{d}\xi \\ &= \frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|\lambda|+ix\lambda}\,\mathrm{d}\lambda \end{aligned}$$

注 6. 这题的想法是“后验”的，如果没碰到过，几乎不可能直接想到 $\frac{1}{a^2+x^2}$ 的 *Fourier* 变换。当然，这可以用含参变量或复分析的留数方法直接算出来 *(Kitty, you can have complex method. Meow!)*。它的灵感来自于下一题，即考虑 $e^{-|x|}$ 的 *Fourier* 逆变换（不是剥蒜用不起，而是查表更有性价比）。

2.6 习题 12.4.2(1)

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-a|x|}e^{-ix\xi}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{0} xe^{(a-i\xi)x}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} xe^{-(a+i\xi)x}\,\mathrm{d}x \\ &= \left.\frac{xe^{(a-i\xi)x}}{a-i\xi}\right|_{x=-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0}\frac{e^{(a-i\xi)x}}{a-i\xi}\,\mathrm{d}x - \left.\frac{xe^{-(a+i\xi)x}}{a+i\xi}\right|_{x=0}^{+\infty} + \int_{0}^{+\infty}\frac{e^{-(a+i\xi)x}}{a+i\xi}\,\mathrm{d}x \\ &= -\left.\frac{e^{(a-i\xi)x}}{(a-i\xi)^2}\right|_{-\infty}^{0} - \left.\frac{e^{-(a+i\xi)x}}{(a+i\xi)^2}\right|_{0}^{+\infty} \\ &= \frac{1}{(a+i\xi)^2} - \frac{1}{(a-i\xi)^2} \\ &= -\frac{4ai\xi}{(a^2+\xi^2)^2} \end{aligned}$$

注 7. 复数的积分运算和实数异曲同工，敢拆敢算就行。

3 难题选讲

3.1 第 12 章综合习题 3

证明. 只需证 (1)。事实上

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2n\pi} f\left(\frac{t}{n}\right)\sin t\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{n\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{2(k-1)\pi}^{2k\pi} f\left(\frac{t}{n}\right)\sin t\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{n\pi}\sum_{k=1}^{n}\left(\int_{2(k-1)\pi}^{(2k-1)\pi} f\left(\frac{t}{n}\right)\sin t\,\mathrm{d}t + \int_{(2k-1)\pi}^{2k\pi} f\left(\frac{t}{n}\right)\sin t\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{1}{n\pi}\sum_{k=1}^{n}\left(\int_{2(k-1)\pi}^{(2k-1)\pi} f\left(\frac{t}{n}\right)\sin t\,\mathrm{d}t - \int_{2(k-1)\pi}^{(2k-1)\pi} f\left(\frac{t}{n}+\pi\right)\sin t\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{1}{n\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{2(k-1)\pi}^{(2k-1)\pi}\left(f\left(\frac{t}{n}\right) - \left(\frac{t}{n}+\pi\right)\right)\sin t\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

□

3.2 Riemann-Lebesgue 引理 *

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，则

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\,\mathrm{d}x = 0$$

证明. 我们只证前一个式子。

对于充分大的 λ，取 $n=[\sqrt{\lambda}]$，则我们可将 $[a,b]$ 分成 n 等分，即

$$[a,b]=\bigcup_{k=1}^{n}[x_{k-1},x_k],\ x_k=a+\frac{k}{n}(b-a)$$

于是

$$\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} f(x)\cos\lambda x = \sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}(f(x)-f(x_{k-1}))\cos\lambda x - \sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x_{k-1})\cos\lambda x$$

记 ω_k 为 $f(x)$ 在 $[x_{k-1}, x_k]$ 上的振幅，则

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x\right| &\leq \left|\sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(x) - f(x_{k-1}))\cos\lambda x\right| + \left|\sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x_{k-1})\cos\lambda x\right| \\
&\leq \frac{1}{n(b-a)}\sum_{k=1}^n \omega_k + M\left|\sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} \cos\lambda x\right| \\
&= \frac{1}{n(b-a)}\sum_{k=1}^n \omega_k + \frac{M}{\lambda}\left|\sum_{k=1}^n (\sin\lambda x_{k-1} - \sin\lambda x_k)\right| \\
&\leq \frac{1}{n(b-a)}\sum_{k=1}^n \omega_k + \frac{2M}{\lambda}
\end{aligned}$$

当 $\lambda \to +\infty$ 时，也有 $n \to +\infty$，于是上式趋于 0。 □

注 8. 这个结论说明：什么都摇摆不定只会害了你自己！会了它，照葫芦画瓢就能做出第 *12* 章综合习题的 *3* 和 *6*。

3.3 第 12 章综合习题 8

证明. 由题，$a_0 = 0$，因此我们可设

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

进而

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (-na_n \sin nx + nb_n \cos nx) \tag{1}$$

由 Parseval 等式

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f'(x))^2\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} n^2\left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

比较系数可知，该不等式及其取等条件是显然的。 □

4 拓展：Kitty, You Can Have Fourier Transform

4.1 名副其实的逆变换

虽然叫做“逆变换”，但一个 L^1 函数进行 Fourier 变换再逆变换，并不一定回到自身。这很好理解，因为积分的过程是在提升光滑性，所以一个不连续的 L^1 （可积且绝对可积）函数在 Fourier 变换和逆变换后会变得连续，这就回不到自身。

好在，有一类比较好的函数，正变换再逆变换能回到自身，逆变换再正变换也是。

定义 2 (Schwartz 函数)**.** *设 $f \in C^\infty(\mathbb{R})$，若它满足*

$$\lim_{x\to\infty} x^m f^{(n)}(x) = 0,\ \forall\, m, n \geq 0$$

则称他为 Schwartz 函数，也称速降函数，它们的集合记为 $\mathcal{S}$。

顾名思义，这个函数在无穷远处降得很快。有多快呢？它的任意阶导数（包括 0 阶导也就是自身），衰减速度能“抵掉”任意多项式的增长速度。其中 $e^{-|x|}$ 和 e^{-x^2} 以及光滑紧支函数都是常见的例子。

Schwartz 函数是 Fourier 分析中最常见的函数，积分性质很好，是 L^p 函数，且在 $p \neq \infty$ 时可以逼近 L^p 函数，即 $\mathcal{S}$ 是 L^p 的稠密子集。因此，很多结论对 Schwartz 函数证明后，取个极限就能得到 L^p 函数的结论。对于这些好函数，他们的 Fourier 变换“可逆”。

定理 2. *若 $f \in \mathcal{S}$，则*

$$\check{\hat{f}} = f = \hat{\check{f}}$$

证明. 只证前一个等号，另一个类似。

先证明一个结论：对于 $f, g \in \mathcal{S}$，有 **Fourier 变换乘积公式**

$$\int_{\mathbb{R}} (f(\lambda))^\wedge (x) g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda)\,(g(x))^\wedge(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda$$

直接计算得到

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} (f(\lambda))^\wedge (x) g(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(\lambda) e^{-i\lambda x}\,\mathrm{d}\lambda\right) g(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(\lambda) g(x) e^{-i\lambda x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\lambda \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) \left(\int_{\mathbb{R}} g(x) e^{-i\lambda x}\,\mathrm{d}x\right) \mathrm{d}\lambda \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(\lambda)\,(g(x))^\wedge(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda
\end{aligned}$$

这里交换积分次序来自于积分的一致收敛性，Schwartz 函数的性质也正是用在这里。

回到原题，我们先考虑

$$g_\varepsilon(\xi) = e^{-iy\xi} e^{-\varepsilon^2\xi^2}$$

计算得到

$$\hat{g_\varepsilon}(x) = \int_{\mathbb{R}} = e^{-\frac{1}{4}y^2}\left(e^{-(\varepsilon\xi+\frac{1}{2}iy)^2}\right)^\wedge = \frac{1}{\varepsilon}e^{-\frac{(x-y)^2}{4\varepsilon^2}}$$

于是

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}(f(x))^\wedge(\xi)g_\varepsilon(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f(x)\hat{g_\varepsilon}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi\varepsilon}\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-\frac{(x-y)^2}{4\varepsilon^2}}\,\mathrm{d}x$$

由 f 的速降性质可以得到积分关于 ε 一致收敛，于是

$$\begin{aligned}
\check{\hat{f}}(y) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}(f(x))^\wedge e^{iy\xi}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}(f(x))^\wedge(\xi)\lim_{\varepsilon\to 0} g_\varepsilon(\xi)\,\mathrm{d}\xi \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}(f(x))^\wedge(\xi)g_\varepsilon(\xi)\,\mathrm{d}\xi \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi\varepsilon}\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-\frac{(x-y)^2}{4\varepsilon^2}}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(x)\delta(y)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

最后一步来自于

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{2\pi\varepsilon}\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-\frac{(x-y)^2}{4\varepsilon^2}}\,\mathrm{d}x - f(y)\right| &\le \frac{1}{2\pi\varepsilon}\int_{\mathbb{R}}|f(x)-f(y)|e^{-\frac{(x-y)^2}{4\varepsilon^2}}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi\varepsilon}\int_{|x-y|\ge\delta}|f(x)-f(y)|e^{-\frac{(x-y)^2}{4\varepsilon^2}}\,\mathrm{d}x \\
&\quad + \frac{1}{2\pi\varepsilon}\int_{|x-y|<\delta}|f(x)-f(y)|e^{-\frac{(x-y)^2}{4\varepsilon^2}}\,\mathrm{d}x \\
&\to 0,\ \varepsilon\to 0
\end{aligned}$$

第二项可取 δ 充分小，再对第一项取 ε 充分小。 □

注 9. 这个定理比较常用，但事实上存在一个比该定理更强的 ***Fourier* 变换可逆性定理**，它只要求 $f, \hat{f} \in L^1$，就能得到 $\check{\hat{f}} = f, a.e.$。证明方法类似，但交换次序那步的“一致收敛性”失效，需要用**控制收敛定理**代替。

4.2 解方程！

Fourier 分析理论在 PDE 中有极其重要的应用。对于非数院的同学，微分方程就是用来解的。所以我们分别来看来看 Fourier 变换在 PDE 中的最基本的应用之一，即解方程。

由于经常碰到高维的东西，实轴上的 Fourier 变换肯定是不够用的。我们需要先把它推广到高维：

定义 3 (n 维的 Fourier 变换). 设 $x, \xi \in \mathbb{R}^n$，$f(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的 L^1 函数，则定义

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix\cdot\xi}\, dx$$

为 f 的 *Fourier* 变换，而

$$\check{f}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) e^{ix\cdot\xi}\, dx$$

为 f 的 *Fourier* 逆变换。

n 维的 Fourier 变换仍满足求导性质

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)^{\wedge}(\xi) = -ix_j \hat{f}(\xi)$$

和卷积性质

$$(fg)^{\wedge} = \hat{f} * \hat{g} \qquad (fg)^{\vee} = \check{f} * \check{g}$$

因此直接计算可以得到 Laplace 算子的 Fourier 变换

$$(-\Delta u)^{\wedge}(\xi) = \left(-\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}\right)^{\wedge}(\xi) = \sum_{j=1}^{n} \left(-\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}\right)^{\wedge}(\xi) = |\xi|^2 \hat{u}(\xi)$$

我们先解热方程

$$\begin{cases} u_t(x,t) - \Delta u(x,t) = f(x,t),\ t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$$

直接对 x 进行 Fourier 变换（t 不动），得到

$$\begin{cases} \hat{u}_t(\xi,t) - |\xi|^2 \hat{u}(\xi,t) = \hat{f}(\xi,t),\ t > 0 \\ \hat{u}(\xi,0) = \hat{\varphi}(\xi) \end{cases}$$

注意到这是一个关于 t 的一阶线性方程，用 ODE 理论解得

$$\hat{u}(\xi,t) = \hat{\varphi}(\xi) e^{-|\xi|^2 t} + \int_0^t \hat{f}(\xi,\tau) e^{-|\xi|^2 (t-\tau)}\, \mathrm{d}\tau$$

为了得到解，只需要再取逆变换，利用卷积性质得到

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) e^{-|x-y|^2 t}\, \mathrm{d}y + \int_0^t \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(y,\tau) e^{-|x-y|^2 (t-\tau)}\, \mathrm{d}y\right) \mathrm{d}\tau$$

注 10. 前面知道，一般函数取 *Fourier* 变换再逆变换，未必能回到本身。但区域 $\mathbb{R}^n$ 的性质很好，我们可以通过一些先验的估计证明 u 关于 x 的正则性，从而保证能逆得回来。

类似地，我们可以解全空间的波方程

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) = f(x,t) \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$$

只是解 ODE 那步变成了解一个二阶常系数方程

$$\begin{cases} \hat{u}_{tt}(\xi,t) - |\xi|^2 \hat{u}(\xi,t) = \hat{f}(\xi,t),\ t > 0 \\ \hat{u}(\xi,0) = \hat{\varphi}(\xi) \end{cases}$$

不过这里，只有 f 形式足够好，我们才能给出显式解。

注 11. 对于 $n \leq 3$，全空间上的 n 维波方程存在显式表达式，它们分别是 ***D'Alembert* 公式**、***Poisson* 公式**、***Kirchhoff* 公式**，会在微分方程引论或数理方程中学到。

4.3 分离变量法

Fourier 变换的方法只能解全空间的方程，一旦限制在某个区域内就失效了。对于一些比较规则的低维区域，分离变量法也可以用于解方程，它的本质是三角级数的正交性。

分离变量法最常用于矩形区域 $[a,b] \times [c,d]$。方便起见，我们考虑 $(x,t) \in [0,l] \times [0,1]$。对于一维齐次（即 $f = 0$）的初边值为 0 波方程，假设解是可分离变量的，即 $u(x,t) = X(x)T(t)$，则

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \Longrightarrow XT'' = X''T \Longrightarrow \frac{X''}{X} = \frac{T''}{T} = -\lambda$$

这时候就有了两个二阶 ODE。为了满足 T 的周期性，我们发现只能 $\lambda > 0$。此时解形如

$$X(x) = A\cos\frac{m\pi}{l}x + B\sin,\ m \geq 1$$

再结合边可以得到 $A = 0$。

注意到 $\{\sin\frac{m\pi}{l}x\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 构成 $[0,l]$ 上的正交基，于是我们可以对 u 进行正交分解

$$u(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} u_m(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} T_m(x)\sin\frac{m\pi}{l}x$$

代回方程就能解出 T_m（相当于 u 在 $\sin\frac{m\pi}{l}x$ 上的投影）。

而对于一般一维波方程

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = f(x,t) \\ u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x) \\ u(0,t) = g_0(t),\ u(1,t) = g_1(t) \end{cases}$$

不妨设边值为 0，否则我们可以将边值减去，考虑 $v = u - (1-x)g_0 - xg_1$ 满足的方程。再将 φ, ψ, f 全部在上述正弦级数构成的正交基下展开。最后只需解一个形如

$$\begin{cases} T_m'' - \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 T_m = f_m \\ T_m(0) = \varphi_m \\ T_m'(0) = \psi_m \end{cases}$$

的二阶方程。

以上即是分离变量法的基本思想，它还常用于热方程和 2 维的调和方程。特别地，如果区域是圆或者圆环，则可以改用极坐标，同样可以分离变量。该方法在物理中的一个典型应用就是解氢原子的波函数，那里是三个变量的分离。

5 拓展：从 Gamma 函数到 Riemann 猜想（编辑于考试后）

我们早在第七章就接触了 Riemann Zeta 函数

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

那时我们在课后题里证明了 $\zeta(x)$ 和它的各阶导数在 $(1, +\infty)$ 中关于 x 内闭一致收敛，从而在 $(1, +\infty)$ 上光滑。

对于 Riemann 猜想有所耳闻的同学可能知道它的表述：$\zeta(z)$ 的零点除了 $-2n$ 外，全部落在直线 $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}$ 上。但是，它明明在负半轴都发散了，怎么还能有零点呢？让人意想不到的是，第十三章里看似默默无闻的 Gamma 函数，居然能将 Zeta 函数的定义域延拓。不仅是负半轴，Zeta 函数甚至能在除了 $z = 1$ 外的整个复平面都有定义。

5.1 复变函数与全纯函数

首先，我们需要知道复的函数是怎么定义的。高中就学过复数也有加减乘除，并且和实数的加减乘除是相容的。所以，我们可以定义复的多项式函数，进而也能定义幂函数。另一个重要的复变函数是指数函数：

定义 4 (复的指数函数)**.** 由 *Euler* 公式

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

所以对于正实数 a，我们可以定义它的 z 次幂

$$a^z = a^x a^{iy} = a^x \left(e^{iy}\right)^{\ln a} = a^x \left(\cos y + i\sin y\right)^{\ln a} = a^x \left(\cos(y\ln a) + i\sin(y\ln a)\right)$$

注 12. 事实上，我们也可以定义复数的复数次幂，以及对数函数等复变函数，但它们与主题无关，且会涉及**多值函数**这一十分麻烦的问题，所以忽略。（我不会，下学期再学习）

由 Euler 公式，我们还可以通过指数函数定义 $\sin z$ 和 $\cos z$。

至此，我们完成了基本的定义。复的函数最好的性质是全纯性质，即

定理 3. 对于复变函数 $f(z)$ 以下三条等价

1. $f(z)$ 在 z_0 可导，即

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \lim_{|z-z_0|\to 0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

   存在且有限

2. $f(z)$ 在 z_0 光滑

3. $f(z)$ 在 z_0 可以 *Taylor* 展开

满足这三条的函数称为 z_0 处的**全纯函数**。

复分析之所以能成为一门独立的学科，本质上依赖于该性质。

对于一个没有定义在全空间的函数，我们有时可以将它延拓。

定义 5 (全纯开拓)**.** 设 $f(z)$ 和 $F(z)$ 分别是 D_0 和 D 上的全纯函数，且

$$f(z) = F(z),\ \forall z \in D_0 \subset D$$

则称 F 是 f 在 D 上的全纯开拓。

一个很典型的例子是幂级数

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n$$

它的收敛半径为 1，所以只在开的单位圆盘 $D_0 = \{|z| < 1\}$ 上由定义。然而，函数 $F(z) = \frac{1}{1-z}$ 在除了 $z = 1$ 外均有定义，且 F 和 f 在 D_0 上相等。所以，$f(z)$ 可以通过这种方式延拓到 $\mathbb{C}\backslash\{1\}$ 上。

5.2 Gamma 函数的延拓

有了复变函数的概念，我们就可以尝试把 Gamma 函数延拓到正半轴之外。

形式上，我们考虑

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^z \,\mathrm{d}t$$

当 $\mathrm{Re}(z) > 0$ 时，注意到 $|t^z| = |t^{\mathrm{Re}(z)}|$。因此，利用 Cauchy 准则（可以看成平面上的点），我们可以类似于实的情形得到 $\Gamma(z)$ 在右半平面的收敛性。至此，我们已经将 Gamma 函数延拓到整个右半平面。

在数学分析中已经学到，Gamma 函数在 $(0, +\infty)$ 光滑。类似得，我们可以通过内闭一致收敛性得到 $\Gamma(z)$ 在右半平面的全纯性。

接下来，我们想把它延拓到左半平面。别忘了 Gamma 函数有一个阶乘的性质，现在我们反着用，"一步步往回走"。设 $-1 < \mathrm{z} \le 0$，我们定义

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}$$

它在 $z \neq 0$ 时保持全纯。这样我们就把 Γ 延拓到了

$$\{z \in \mathbb{C} | \mathrm{Re}(z) > -1\} \setminus \{0\}$$

重复 k 次，Gamma 函数就能全纯开拓到

$$\{z \in \mathbb{C} | \mathrm{Re}(z) > -k\} \setminus \{0, -1, \cdots, 1-k\}$$

最终，我们将 Gamma 函数全纯开拓到了

$$\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \cdots\}$$

可以看出，非正整数点处 $|\Gamma(z)|$ 趋于无穷，因此没有办法继续延拓。这些奇点都是**一阶极点**，这是指对于非正整数 z_0

$$\begin{aligned}(z - z_0)\Gamma(z) &= \frac{z - z_0}{z}\Gamma(z+1) = \frac{z - z_0}{z(z+1)}\Gamma(z+2) = \cdots \\ &= \frac{z - z_0}{(z+1)(z+2)\cdots(z - z_0 + 1)}\Gamma(z + z_0) \\ &= \frac{1}{(z+1)(z+2)\cdots(z - z_0 + 1)}\Gamma(z - z_0 + 1)\end{aligned}$$

即

$$(z - z_0)\Gamma(z)$$

在非正整数 z_0 附近全纯。

注 13. 可以直观理解为 z_0 为 $f(z)$ 的 k 阶极点等价于

$$f(z) \sim \frac{C}{(z-z_0)^k},\ z \to z_0$$

实际上，Gamma 函数的性质对于 Zeta 函数并不重要，重要的是它的倒数。类似实的情形可以证明

定理 4 (余元公式)**.**

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

通过定义可知

$$\sin \pi z = \frac{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}}{2i}$$

是全空间的全纯函数，且零点全部落在实轴上。熟知 $\sin \pi x$ 的零点是所有整数，进一步在整数点进行 Taylor 展开，会发现其常数项为 0 但一次项非零。即 $\sin \pi z$ 的零点是所有整数，且**重数均为 1**。

于是

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{\sin \pi z}{\pi}\Gamma(1-z)$$

在正整数处零点和极点“相互抵消”。于是我们得到结论

定理 5. $\frac{1}{\Gamma(z)}$ 整个复平面上的全纯函数，零点有且仅有非正整数，且重数均为 1。

5.3 Zeta 函数的延拓

首先，我们再引入一个非初等函数

定义 6 (theta 函数)**.** 定义函数

$$\theta(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 t}$$

由指数函数的速降性，不难验证它在 $(0, +\infty)$ 良好定义。

下面，我们希望用上述函数把 Zeta 函数“凑出来”。

定理 6. 对于实部大于 1 的复数 z，我们有恒等式

$$\pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} t^{\frac{z}{2}-1}\left(\theta(t)-1\right)dt = \xi(z)$$

证明. 对 Gamma 函数换元很容易得到

$$\int_0^{+\infty} e^{-\pi n^2 t} t^{\frac{z}{2}-1}\,\mathrm{d}t = \pi^{-\frac{z}{2}} n^{-z} \Gamma\left(\frac{z}{2}\right)$$

由对称性，注意到

$$\frac{\theta(t)-1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 t}$$

于是

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} t^{\frac{z}{2}-1}\left(\theta(t)-1\right)\mathrm{d}t &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} t^{\frac{z}{2}-1} e^{-\pi n^2 t}\,\mathrm{d}t \\ &= \pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\sum_{n=1}^{\infty} n^{-z} \\ &= \pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z)\end{aligned}$$

□

由此，我们神奇地得到了 Zeta 函数的一个表达式

$$\zeta(z) = \frac{\xi(z)}{\pi^{\frac{z}{2}}\Gamma(\frac{z}{2})}$$

这里 Gamma 函数的倒数已经研究得很明白了，我们想看看 $\xi(z)$ 有什么性质。

这里我们需要用到一个 Fourier 级数的定理

定理 7 (Fourier 级数的 Poisson 公式)**.** 设 $f \in \mathcal{S}$，则

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)$$

证明. 考虑周期为 1 的周期函数

$$F(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)$$

它的 Fourier 系数

$$\hat{F}(n) = \int_0^1 e^{-2\pi i n x} F(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i n x} f(x)\,\mathrm{d}x = \hat{f}(n)$$

因此，对 F 进行 Fourier 展开得到

$$F(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{F}(n) e^{2\pi i n x} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x}$$

取 $x = 0$ 即得结论。 □

由 Poisson 公式可以得到

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 t} = t^{-\frac{1}{2}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi n^2}{t}} \Longrightarrow \theta(t) = t^{-\frac{1}{2}}\theta\left(\frac{1}{t}\right)$$

考虑

$$\psi(t) = \frac{\theta(t)-1}{2} \Longrightarrow \psi(t) = t^{-\frac{1}{2}}\psi\left(\frac{1}{t}\right) + \frac{1}{2t^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2}$$

就有

$$\begin{aligned}
\xi(z) &= \int_0^{+\infty} t^{\frac{z}{2}-1}\psi(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{1} t^{\frac{z}{2}-1}\psi(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} t^{\frac{z}{2}-1}\psi(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{1} t^{\frac{z}{2}-1}\left(t^{-\frac{1}{2}}\psi\left(\frac{1}{t}\right) + \frac{1}{2t^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} t^{\frac{z}{2}-1}\psi(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z} + \int_1^{+\infty}\left(t^{\frac{z}{2}-1} + t^{-\frac{z}{2}-\frac{1}{2}}\right)\psi(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

由 $\psi(t)$ 的指数衰减可得内闭一致收敛性，从而积分项全纯。这说明 $\xi(z)$ 是 $\mathbb{C}\backslash\{0,1\}$ 上的全纯函数，且 0 和 1 均为一阶奇点。

回到 Zeta 函数的表达式上，注意到 $z=0$ 时 $\xi(z)$ 的一阶极点和 $\frac{1}{\Gamma(z)}$ 的一重零点抵消，在结合 $\xi(z)$ 和 $\Gamma(z)$ 的定义域，最终可以得到

定理 8 (Zeta 函数的性质)**.** 设

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

为 *Riemann Zeta* 函数，则它

1. 可以全纯开拓到 $\mathbb{C}\backslash\{1\}$
2. 奇点有且仅有 $z=1$，且是一阶极点
3. 不以 0 为零点
4. 在负偶数 $-2,-4,-6,\cdots$ 取 0，这些零点成为**平凡零点**

至此，我们可以再次表述 Riemman 猜想：ζ 函数的非平凡零点实部均为 $\frac{1}{2}$。