数学分析 (B2) 复习提纲

于俊骜

2024 年 7 月 3 日 (UTC-5)

目录

1 知识点总结

使用方法：对照列出的概要，回忆公式、定理的具体内容。最好是拿张纸写一写，有时候以为能想明白但考场上写不出来。

建议章节优先级：

$$11 \geq 13 > 12 > 10 > 9 \gg 8$$

1.1 空间解析几何

叉乘

- 线性性、**反**对称性、分配律；
- 叉乘和混合积的坐标计算；
- 叉乘的模长；
- 判断三个线性无关向量是左手系还是右手系。

向量计算的基本应用

- 计算方向余弦；
- 向量的 Cauchy 不等式；
- **三角形**、平行四边形的面积，**三棱锥**、平行六面体的体积公式；
- 判断共线、共面。

平面与直线

1. 平面方程，直线的各种形式方程；
2. 点线、点面、线线（尤其是异面）、线面、面面距离；
3. 判断两直线关系、直线与平面关系；
4. 线面、面面夹角

投影与对称

- 点关于点、线、面的对称点；
- 直线在平面上的投影；
- 点在直线、平面上的投影；
- 点到线、面的垂线方程；
- 两直线的公垂线方程。

旋转曲面

- 判断一个曲面是否旋转而成；
- 计算曲线绕某直线旋转而成的曲面。

二次曲面

- 判断曲面名称；
- 计算交线方程；
- 部分二次曲面的参数方程。

1.2 多变量微分

极限

- 判断二重极限是否存在；
- 二重极限和累次极限的计算。

函数的正则性

- 函数的连续性，函数的二重极限和累次极限；
- 方向导数、偏导数和全微分的计算（复合函数）；
- 偏导数的换序；
- 可微性的**等价**判定
- 连续、可微、偏导数存在、偏导数连续、方向导数存在的互推及反例。

隐映射定理

- 隐函数和逆映射的存在性判定；
- 通过两边微分的方式计算隐函数、逆映射的一阶或高阶导数；
- 用矩阵解决隐函数组问题。

微分几何初步

- **单位**切向量和法向量，法平面和切平面；
- 曲率的各种公式；
- 偏导数的换序；
- 可微性的**等价**判定
- 连续、可微、偏导数存在、偏导数连续、方向导数存在的互推及反例。

极值与条件极值

- 通过正定性判断极值；
- Lagrange 乘数法；
- 多元函数的中值定理与 Taylor 公式。

梯度旋度散度

- 三度（尤其是旋度）的计算公式；
- Hamilton 算子的常见运算。

1.3 多重积分

基本性质

- 分割求和取极限的定义；
- 重积分化为累次积分的条件；
- 换序计算（有些时候需要凑一个积分出来）；
- 积分中值定理。

换元

- 极坐标、柱坐标、球坐标；
- 新元范围的判定；
- Jacobi 行列式。

1.4 曲线曲面积分

曲线积分

- 两类曲线积分的定义式；
- Green 公式的切向量和法向量形式；

曲面积分

- 通过第一基本量计算第一类曲面积分；
- 直接代换计算第二类曲面积分；
- 换元计算第二类曲面积分；
- Gauss 和 Stokes 公式。

保守场

- 单连通区域保守场的四个等价定义（多连通有一个不对）；
- 选取合适的路径计算曲线积分
- 奇点的处理；
- 解恰当方程；
- 求有势场的势函数。

1.5 Fourier 分析

Fourier 级数的性质

- 周期函数的 Fourier 级数的计算；
- 奇、偶延拓后进行正弦、余弦展开；
- Dirichlet 定理的使用条件；
- 复数形式的 Fourier 级数的计算。
- 用 Dirichlet 定理或 Parseval 等式给级数求和。
- L^2 内积与广义 Fourier 级数。

Fourier 变换

- 将函数写成 Fourier 积分；
- 正反变换的计算；
- 线性、平移、求导、卷积性质。

1.6 反常积分

反常积分的收敛性

- 各种收敛判别法；
- 判断绝对收敛和条件收敛的技巧；
- 线性、平移、求导、卷积性质。

含参积分

- 含参常义积分的连续性、可微性
- 对积分含参的积分的求导公式；
- 含参常义积分的各种一周收敛性的判别法；
- 不一致收敛的判别法（包括那个等价条件）；
- 通过（内闭）一致收敛进行换序。
- Dirichlet 积分、Fresnel 积分的值。

Euler 积分

- Beta 函数化为 Gamma 函数；
- Gamma 函数的特殊值计算；
- 余元公式；
- 不一致收敛的判别法（包括那个等价条件）；
- 通过（内闭）一致收敛进行换序。
- Dirichlet 积分、Fresnel 积分的值。

2 易错点汇总

不难注意到，大家考试的易错点和作业易错点高度重合，于是这里将作业的反馈取并（删掉了重复的），一次看个够。

- 表示角不要用角度制，统一写弧度制；
- 尽量写分数不写小数，否则易混；
- 叉乘、行列式计算错得较多；
- 选特殊点的时候尽量选些简单的点；
- 如果可以的话，直线方程的系数尽量化为整数；
- 三角形面积要除以 2。
- 习题 9.1 的 15(2) 几乎都漏情况；
- 曲面命名不规范，出现“抛物面、旋转椭球面”等；
- 遇到平方差时，尽量考虑双曲三角换元；
- 习题 9.1 的 17(1)，直线 $y = x$ 上的连续性并不相同，不能混为一谈；
- 均值不等式要求变量非负，否则不成立。
- 对于 $u = f$ 形的函数求各阶偏导数，最终的结果不应带 u，而应带 f；

- 以习题 9.2 的 20(4) 为例，f 的偏导那项，**一定不能**写成 $\frac{\partial f}{\partial(x+y+z)}$。一种写法是单独设出新变量 $\xi = x+y+z$，然后分母改为 ξ；另一种写法是直接 f_1，意为对第一分量求导。
- 求“一点处”的微分/偏导数时要把那点代入算出来。
- 方向导数最大值是梯度模长，而不是某个绝对值最大的分量的绝对值；
- 结果要进行一定化简，方便拆的括号要拆，非必要不分式套分式，直线和平面方程要约分；
- 求 z 对 x 的导数，能不带 y 就不带 y；
- 椭球的法向量同向的切平面有两个。
- 如果求的是某点处的全增量/偏导数/微分，最终要把该点代入；
- 如果在 (a,b) Taylor 展开，项形如 $(x-a)^i(y-b)^j$ 而不是 x^iy^j；
- 展开到 n 项时，结果中不能有高于 n 的项；
- 极值点和边界上的最值点不要漏。
- 三个轴长不同的椭球，其内接正方体棱一定平行于坐标轴。
- 想不通累次积分换序时，可以多画画图，把上下限写对；
- 上课没讲过的函数，如 $\sinh^{-1}$，尽量不要用；
- 目前所学知识，可积性的等价判定只有分割求和取极限。
- 积分推导的相邻等号间，比较容易漏系数。
- 第 10 章综合习题中没做出来的题目，看过答案后多想想。
- 如果题目没说明，那么参数 a 未必恒正，有时结果中要加绝对值；
- 曲面参数化是，Jacobi 已经蕴含在 $\sqrt{EG-F^2}$ 中，不要再多乘 ρ 或 $\rho^2\sin\theta$；
- 换坐标系的时候要保持思路清晰，想明白点之间的对应关系；
- 看明白题目中曲面的范围有没有限制，如 $z \geq 0$。

- Green 公式千万别减反；
- 注意曲线的方向，有时容易漏负号；
- 只有保守场才能随便换路径，如果是局部保守，那也只能在局部换，尤其注意绕圈 $\pm 2\pi$ 的情况，乱绕肯定出错。
- 如果用换元方法计算曲面积分，不要漏了 Jacobi，也要注意计算正确性，避免写着写着漏一项等错误；
- 别漏常数 a；
- 三个“分量”挨个计算曲面积分时，每个“分量”相当于的积分区域是曲面在那上面的投影（如果只投下去一层）；
- 第二类曲面积分正负号的判定需要一定经验，如果不放心，可以重新写成向量点乘的形式，看看点乘出来是正的还是负的；
- 注意“偶零奇倍”的使用条件，尤其是它“关于谁”是奇/偶函数。
- Green 公式的法向形式也很有用，有余力的同学可以记住；
- 在强调一次算叉乘的准确性和熟练度；
- 不是闭的曲面，用 Gauss 公式要补一块儿面积分；
- 求势函数最后要加 C；
- Fourier 级数中，a_0 要除以 2；
- Fourier 级数尽可能写 $\sim$ 而不要写 $=$，除非验证了收敛性。
- 注意函数的区间，不要看到 $f(x) = \frac{x}{3}$ 就直接当成奇函数来算。
- e^{ax} 和 x 与三角函数的积分结论可以记忆，省时省力；
- 积分前的系数 $\frac{1}{l}$ 和三角函数里的变量容易写差一个倍数；
- 第二类曲面积分正负号的判定需要一定经验，如果不放心，可以重新写成向量点乘的形式，看看点乘出来是正的还是负的；
- 如果正交函数系里有常数，则它的单位化往往与其他函数不同，因为 L^2 “模长”不同；

- Dirichlet 定理只能保证一个周期内的相等，一旦要求 Fourier 级数在该周期外的值，需要平移到该周期内计算。
- Fourier 积分的结果应当只有一个积分号
- 特殊函数 $\frac{1}{x^2+a^2}$ 的 Fourier 变换可以通过 $e^{-|x|}$ 间接计算，直接计算会用到复变中的留数定理；
- 部分同学把 x^{-p} 的收敛性记反；
- 别漏瑕点。
- 对含参积分求导，求出来的式子未必能积出来，若积不出来可以留着；
- 加强初等积分计算的熟练度和准确性；
- 看清题目所给的参数范围；
- 换元时，新元要良定，起码不能恒为 0；
- 看似化到最后一步了，还要检查一下能否用余元公式进一步计算；
- $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi} \neq \frac{\sqrt{\pi}}{2}$，别和 Gauss 积分记混。

祝大家期末顺利，满载而归，为数学分析写下一封完美的离别信。此外，感谢各位一学期甚至一年以来的支持与陪伴，一路同行，倍感荣幸。

愿你们的未来，皆如星光般闪耀。