第四次习题课讲义

于俊骜

2024 年 10 月 9 日

目录

1 复习回顾

1.1 内积结构

内积是比范数更强的一个结构。一旦有了内积，我们就可以通过

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

定义范数。因此 **Hilbert** 空间是一种特殊的 Banach 空间。至此，我们可以得到诱导关系：内积 $\rightarrow$ 范数 $\rightarrow$ 度量 $\rightarrow$ 拓扑。

上面的诱导关系反过来均不成立。关于内积和范数的关系，我们有如下重要的刻画：

定理 1 (Fréchet-Von Neumann 定理). *一个范数是由内积诱导的当且仅当它满足***平行四边形等式**。

由此，我们可以判定 L^p 空间中有且仅有 L^2 是 Hilbert 空间。

由于有了内积，欧氏空间的很多结论可以推广到 Hilbert 空间，例如**勾股定理**、**Cauchy-Schwartz 不等式**、**正交补空间**。一个有趣的结论是

定理 2. *Hilbert 空间 X 的线性子空间 M 的正交补 $M^\perp$ 是 X 的闭子空间。*

它在一些特殊情境很好用。由于 Hilbert 空间性质很好，它的种类也比较少。

定理 3 (可分 Hilbert 空间的分类). *在等距同构的意义下，可分 Hilbert 空间只有 $\mathbb{K}^n$ 和 l^2。*

1.2 垂直

在欧氏空间中，内积往往与夹角有关。但在一般的 Hilbert 空间中，夹角其实没什么意义。但是，垂直依然是个很重要的概念。

定义 1 (垂直). *我们称 $x, y \in H$ 相互垂直，是指 $\langle x, y \rangle = 0$。*

也就是说，有了内积才有了垂直，而不是相反。

在欧氏空间中，一个点到一条直线或一个平面的距离定义为垂线段的长度。这给我们定义最佳逼近元有了新的启发。如果能把 Banach 空间加强为 Hilbert 空间，就可以用内积得到“更形象”的最佳逼近理论。

定理 4 (Hilbert 空间的最佳逼近). *设 M 是 Hilbert 空间 X 的闭凸子集，则 $\forall x \in X$，$\exists y \in M$，使得*

$$d(x, y) = d(x, M)$$

特别地，若 M 为闭子空间，则 $(x - y) \perp M$。

1.3 正交基

线性代数学到内积空间的时候，我们很大篇幅地研究了正交基。我们最早接触的非欧氏的 Hilbert 空间是 Fourier 级数用到的 L^2 空间。任何一个周期函数可以分解为一串三角函数的和，它们中任何两个不同的相乘积分为 0。这种正交性在调和分析的一些理论中起到了重要作用。在其他

正交分解的过程就是把原函数“投”到各个坐标轴上，而 Hilbert 空间的元素未必能写成坐标的形式，所以我们需要重新说明白如何做到这种投影。

定理 5 (正交分解). *设 M 为 Hilbert 空间 X 的一个闭子空间，则*

$$H = M \oplus M^{\perp}$$

由此，我们可以良定义投影算子

定义 2 (投影算子). *设 $x \in X$ 满足*

$$x = y + z,\ y \in M, z \in M^{\perp}$$

则由 X 到 M 的投影算子定义为

$$P_M x = y$$

在不引起混淆的情况下通常简记为 P。

学 Fourier 级数的时候，我们给出正交基后，紧接着证明了 **Parseval 等式**。但这来自于 Fourier 级数的完备性。对于一般的无限维 Hilbert 空间，我们不一定能一下子找出一组正交基，可能会“缺一些分量”，这时候就会出现不等关系。

定理 6 (Bessel 不等式). 设 $\{e_i\}_{i\in I}$ 为 *Hilbert* 空间 X 中一组两两正交的元素，即**正交集**，则它们满足如下不等式

$$\sum_{i\in I}\langle x,e_i\rangle^2 \leq \|x\|^2$$

后面我们知道，和有限维情形相同，任何正交集都可以扩充为一组正交基。而对于正交基，我们就可以将 Parseval 等式从 $L^2[-\pi,\pi]$ 推广到一般 Hilbert 空间。

定理 7 (Parseval 等式). 设 $\{e_i\}_{i\in I}$ 为一组正交集，则它是正交基当且仅当满足 *Parseval* 等式

$$\sum_{i\in I}\langle x,e_i\rangle^2 = \|x\|^2$$

2 作业选讲

2.1 习题 1.4.13

证明. 假设不稠密，则由 Riesz 引理，$\forall\varepsilon>0$，$\exists y\in X\backslash\overline{X_0}$ 满足 $\|y\|=1$，且

$$\inf_{x\in\overline{X_0}}\|x-y\|>1-\varepsilon \Longrightarrow c\|y\|\geq \inf_{x\in X_0}\|x-y\|\geq 1-\varepsilon$$

取 $\varepsilon<1-c$，则 $\|y\|>1$，矛盾！ □

2.2 习题 1.4.14

(1)

证明. 线性性平凡，我们只要证明闭性。

设 $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ 为 M 中的收敛列，其极限为 x。于是 $\forall\varepsilon>0$，$\exists K>0$，当 $k>K$ 时

$$\|x^{(k)}-x\| = \sup_{n\geq 1}\mid \xi_n^{(k)}-\xi^{(k)}\mid<\varepsilon$$

于是

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi_n}{2^n}\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi_n^{(k)}}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi_n - \xi_n^{(k)}}{2^n}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\ \xi_n - \xi_n^{(k)}\ |}{2^n} < \varepsilon$$

令 $\varepsilon \to 0$，则得到结论。 $\square$

(2)

证明. 构造

$$x^{(k)} = \big(1 - 2^{-k}, -1, \cdots, -1, 0, \cdots\big) \in M$$

这里 $x^{(k)}$ 有且仅有前 $k+1$ 项非零。此时有

$$\|x^k - x_0\| = \max\{1 + 2^{-k}, 1\} = 1 + 2^{-k} \to 1,\ k \to \infty$$

另一方面，

$$\|x - x_0\| = \sup_{n\geq 1}\left(\xi_1 - 2, \xi_2, \xi_3, \cdots\right)$$

假设对任意 $n \geq 2$ 都有 $|\xi_n| \leq 1$，则

$$2 - \xi_1 = 2 - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi_n}{2^n} \geq 2 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}} = 1$$

这说明 $\|x - x_0\| \geq 1$，进而

$$\inf_{x\in C_0}\|x - x_0\| = 1$$

假设 $x \in C_0$ 满足 $\|x - x_0\| = 1$，则上面的不等号全部取等，此时

$$x = (1, -1, -1, \cdots) \notin C_0$$

矛盾！ $\square$

注 1. 最佳逼近元取不到的根本原因是大空间不完备。

2.3 习题 1.4.15

证明. 先任取满足 $\|y\| = 1$ 的 $y \in X \backslash M$，定义

$$d(y) = \inf_{x \in M} \|x - y\|.$$

由 $\dim M < +\infty$ 知 M 闭，从而 $X \backslash M$ 开，故 $d(y) > 0$。此时，存在 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足

$$d \leq \|x_k - y\| \leq d + \frac{1}{k}$$

注意到 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset B_{d+1}(y)$，即 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$ 有界，从而在 M 中有收敛子列，设其极限为 x_0。此时

$$d = \|y - x_0\|$$

我们取

$$y_0 = \frac{y - x_0}{d}$$

则 $\forall x \in M$，都有

$$\|y_0 - x\| = \frac{1}{d}\|y - (x_0 + dx)\| \geq \frac{1}{d} \inf_{x \in M} \|y - x\| = 1$$

□

2.4 习题 1.4.17

(1)

证明.

$$\|[x]\|_0 = \inf_{x \in [x]} \|x\| = \inf_{y - x \in X_0} \|y\| = \inf_{z \in X_0} \|x - z\|$$

□

(2)

证明. 任取 $x, y \in X$，都有

$$\|\varphi(x) - \varphi(y)\|_0 = \|[x] - [y]\|_0 = \|[x - y]\|_0 = \inf_{z \in [x-y]} \|z\| \leq \|x - y\|$$

这说明 φ 是 Lipschitz 函数，从而连续。 □

(3)

证明. 若 $[x]=[0]$ 则结论平凡。若 $[x]\neq[0]$，由

$$\|[x]\|_0=\inf_{x\in[x]}\|x\|>0$$

知，存在 $y\in[x]$，使得

$$\inf_{x\in[x]}\|x\|\leq y\leq 2\inf_{x\in[x]}\|x\|$$

这个 $y\in X$ 即满足

$$\|y\|\leq 2\|[x]\|_0$$

$\square$

(4)

证明. 构造映射

$$\begin{aligned}\varphi: X&\longrightarrow\mathbb{K}\\ f(x)&\longrightarrow f(0)\end{aligned}$$

这显然是满射。注意到

$$\varphi(f(x))=\varphi(g(x))\Longleftrightarrow f(0)=g(0)\Longrightarrow f-g\in X_0$$

因此 φ 诱导双射

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}: X/X_0&\longrightarrow\mathbb{K}\\ [f(x)]&\longrightarrow f(0)\end{aligned}$$

这里

$$g(x)\in[f(x)]\Longleftrightarrow g(0)=f(0)$$

最后只要证明 $\bar{\varphi}$ 是等距。首先注意到 $\bar{\varphi}$ 线性，于是

$$\begin{aligned}\|\bar{\varphi}(f)\|_0=\inf_{g\in X_0}\|f-g\|&=\inf_{g\in X_0}\sup_{x\in[0,1]}\mid f(x)-g(x)\mid\\ &=\inf_{\substack{h\in X\\ h(0)=f(0)}}\sup_{x\in[0,1]}\mid h(x)\mid\geq h(0)=f(0)\end{aligned}$$

注意到可以取 $h(x)=(1-x)f(0)$ 使得等号成立。因此

$$\|\bar{\varphi}(f)\|_0=|f(0)|$$

□

注 2. 和投影算子类似，φ 是**有界算子**，且算子范数为 1。关于商空间用到的方法与技巧，参考其完备性的证明即可。

3 拓展：正交多项式

3.1 Legendre 多项式和 Gegenbauer 多项式

在 ODE 的幂级数理论中，有下面一个特殊的方程

$$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0$$

它称为 **Legendre 方程**。它的其中一个解是 **Legendre 多项式**

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{[n/2]}\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{k!(n-k)!(2n-k)!}x^{n-2k}$$

通过多次分部积分可以证明

$$\int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)\,\mathrm{d}x=\begin{cases}\frac{1}{2n+1}, & m=n\\ 0, & m\neq n\end{cases}$$

它们是 $L^2[-1,1]$ 的一组正交集。由正交性可知线性无关，所以它们也是 $P[-1,1]$ 的基。进而由稠密性知 $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $L^2[-1,1]$ 的正交基。进而 $\{\sqrt{2n+1}P_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是**规范正交基**。

Gegenbauer 将 Legendre 多项式进一步推广为 **Gegenbauer 多项式**

$$C_k^{\frac{n-1}{2}}=\left(-\frac{1}{2}\right)^k\frac{\Gamma(k+n-1)\Gamma(\frac{n}{2})}{k!\Gamma(n-1)\Gamma(k+\frac{n}{2})}(1-x^2)^{-\frac{n-2}{2}}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}(1-x^2)^{k+\frac{n-2}{2}}$$

特别地，取 $n=2$ 即得到 Legendre 多项式。它们满足正交关系

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\frac{n-2}{2}}C_j^{\frac{n-1}{2}}C_k^{\frac{n-1}{2}}=A_n\frac{k+n-2}{k!(k+\frac{n-1}{2})}\delta_{jk},\quad A_n=\frac{\pi}{2^{n-2}\Gamma(\frac{n-1}{2})^2}$$

进而可以证明它们也是 $P[-1,1]$ 的基。

注 3. 这个内积诱导的范数与 L^2 范数并不等价。

3.2 一个应用

考虑下面的方程

定义 3 (常 Q-曲率方程). n 为偶数时，n 维的常 Q-曲率方程定义为

$$\alpha P_n u + (n-1)!\left(1 - \frac{e^{nu}}{\int_{\mathbb{S}^n} e^{nu}\, d\omega}\right) = 0,\ x \in \mathbb{S}^n$$

这里 $0 < \alpha < 1$，其中 *Paneitz* 算子

$$P_n = \prod_{k=0}^{\frac{n-2}{2}} (-\Delta + k(n-k-1))$$

是 *Laplace* 算子的 $\frac{n}{2}$ 次多项式（特别地，$P_2 = -\Delta$）。

桂长峰等人 2022 年在 *Journal of Functional Analysis* 上给出如下结果

定理 8. 当 $\alpha = \frac{1}{n+1}$ 时，上述方程无非常数轴对称解。即不存在非平凡的 $u = u(x)$ 满足该方程。

证明中用到了 Gegenbauer 多项式一个很重要的性质：它是轴对称化后球面上的 Paneitz 算子的特征函数，即

$$P_n C_k^{\frac{n-1}{2}} = \lambda_k C_k^{\frac{n-1}{2}}, \quad \lambda_k = \frac{\Gamma(n+k)}{\Gamma(k)}$$

因此对 u 做正交分解就有

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} a_k C_k^{\frac{n-1}{2}} \Longrightarrow P_n u = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k a_k C_k^{\frac{n-1}{2}}$$

令

$$G = (1-x^2)u' = \sum_{k=0}^{\infty} b_k C_k^{\frac{n-1}{2}}$$

代回原方程展开，比较 $C_0^{\frac{n-1}{2}}$ 的系数得到

$$\frac{2(n-1)!n!}{n+1}\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) a_1 = 0 \Longrightarrow a_1 = 0 \Longrightarrow b_0 = 0$$

进一步比较 $C_1^{\frac{n-1}{2}}$ 的系数，就有

$$\frac{2(n!)^2}{(n-1)^2(n+3)}\left(n+1-\frac{1}{\alpha}\right) a_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+n-1)!}{(k+1)(2k+n+1)(k+1)!} \prod_{s=1}^{n-1} (k+s) b_{k+1}^2$$

只要 $\alpha = \frac{1}{n+1}$，就只能有 $b_1 = b_2 = \cdots = 0$，这说明 u' 是 0，从而 u 是常数。