第七次习题课讲义

于俊骜

2024 年 11 月 19 日

目录

1 复习回顾

1.1 凸性

集合的凸性在几何测度论等学科中有重要的地位，大家如果进一步学习，还能碰到例如**局部凸**、**一致凸**、**凸度**等概念。但无论如何，凸性的宇宙万法的那个源头都是**凸组合**。

定义 1 (凸集). 一个集合 C 是凸的当且仅当对任意 $x, y \in C$ 以及 $\lambda \in [0,1]$，都有

$$\lambda x + (1-\lambda) y \in C$$

直观上理解，就是任两点的连线还落在集合里。

为了具体描述凸集的形状，我们定义了 Minkovski 泛函。

定义 2 (Minkovski 泛函). 对于线性空间 X 上一个包含原点的凸子集 C，定义

$$P(x) = \inf\left\{\lambda > 0 \,\middle|\, \frac{x}{\lambda} \in C\right\}$$

这里 P 可以取 $+\infty$。它满足

1. $P(0) = 0$
2. $P(\lambda x) = \lambda P(x),\ \forall\, \lambda > 0$
3. $P(x+y) \le P(x) + P(y)$

从而是一个**次线性泛函**。

特别地，当凸集长得比较规整时，Minkovski 泛函也会有些更好的性质。

定义 3 (吸收凸集). 若 $\forall x \in X$，$\exists \lambda > 0$ 使得 $\frac{x}{\lambda} \in C$，则称 C 是吸收的。不难看出 C 吸收当且仅当 $P(x) < +\infty$.

定义 4 (对称凸集). 若 $x \in C$ 能推出 $-x \in C$，则称 C 是对称的。C 对称的一个充要条件是

$$P(\lambda x) = |\lambda| P(x),\ \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$$

对称性可以进一步推广到复值情形。

定义 5 (均衡凸集). 在复线性空间中，若 $x \in C$ 能推出 $\alpha x \in C$，这里 $\alpha \in \mathbb{S}^1$，则称 C 是均衡的。C 吸收且均衡的一个充要条件是 $P(x)$ 是**半范数**（将范数定义中的“正定性”替换为“半正定性”）。

1.2 凸集的分离

直观上来看，两个不相交的球中间可以插进一张纸把它们隔开。在一般（可以无穷维）的线性空间，直接从几何上定义超平面比较难，我们采用的方法是选一个“秩为 1”的线性算子，也就是线性泛函，它在一点处的原像就是一个余维数为 1 的线性子流形，从而是超平面。

定义 6 (分离). 设 f 是一个非零有界线性泛函。对于两个集合 E_1, E_2，它们可被超平面 $f^{-1}(r)$ 分离是指

$$f(x) \leq r,\ \forall x \in E_1$$
$$f(x) \geq r,\ \forall x \in E_2$$

若不等号严格，则称它们严格分离。

最简单的情形是一个点和一个凸集的分离。

定理 1. 设 E 是实 B^* 空间 X 的真凸子集且 $x_0 \notin E$，则存在超平面分离 x_0 和 E。

注 1. 若 E 加强为闭集，则结论可加强为严格分离，此即 ***Ascoli*** **定理**。

通过这个定理，我们可以证明更强的结论：

定理 2 (凸集分离定理). 设 E_1, E_2 为实 B^* 空间为不交凸集且其中至少一个有内点，则存在超平面分离 E_1 和 E_2。

另外，我们还可以把点推广为更高维的线性结构。

定理 3 (Mazur 定理). 设 E 是实 B^* 空间上的一个有内点的闭凸集，F 是一个线性流形且与 E 的内部不交。此时，存在一个超平面 L 使得 $F \subset L$ 且 E 在 L 的同一侧。

注 2. 比如三维的时候可以想象一条直线被一个平面包含，且凸集在平面的同侧。

2 作业选讲

2.1 习题 2.4.10

证明. 只证 X 为复线性空间的情形。由 Ascoli 定理，存在实线性泛函 $g \in X^*$ 和 x 使得

$$g(x_0) < \alpha < g(x),\ \forall x \in E$$

构造复线性泛函 $f(x) = g(x) + ig(-ix) \in X^*$，则由上题可知

$$|f(x)| = \mathrm{Re} f\left(e^{-i\arg f(x)}x\right) = g\left(e^{-i\arg f(x)}x\right)$$

即

$$|f(x)| = |f(e^{i\arg f(x)}x)| = g(x) > \alpha$$

同理

$$|f(x_0)| = g(x_0) < \alpha$$

□

注 3. 这里用到一个最近要经常用到的结论

$$z = |z|e^{-i\arg z}$$

其目的是把一个复的东西给"扭正回来"。

由凸集分离的要求，$g : X \to \mathbb{R}$ 只能取实值，因此想要得到成复值泛函的最简单想法是构造一个实部和一个虚部。具体这么构造的原因，是希望 f 在实轴方向和虚轴方向长得差不多，只不过"转了一下"，这样 g 的性质就可以更多迁到 f 上。

2.2 习题 2.4.13

证明. 由凸集分离定理知，存在 $f \in X^*$ 和 $s \in \mathbb{R}$，使得

$$f(x) \le s,\ \forall x \in M$$
$$f(x) \ge s,\ \forall x \in B_{d(x)}(x)$$

此时

$$\begin{aligned}\sup_{y\in M} f(y) \leq s \leq & \inf_{y\in B_{d(x)}(x)} f(y) \\ &= \inf_{\|y\|\leq 1} f(x-d(x)y) \\ &= f(x) - d(x)\sup_{\|y\|\leq 1} f(y) \\ &= f(x) - d(x)\|f\|\end{aligned}$$

因此取

$$f_1 = \frac{f}{\|f\|}$$

即满足要求。 □

注 4. 几何直观上，就是让一个球和凸集相切，然后 f 的增长方向垂直于“公切面”。

2.3 习题 2.4.14

证明. 由上一题知

$$d(x) = \inf_{z\in M}\|x-z\| \leq f_1(x) - \sup_{z\in M} f_1(z) \leq \sup_{\substack{f\in X^*\\ \|f\|=1}}\left\{f(x) - \sup_{z\in M} f(z)\right\}$$

下面我们只需证对任意 $f\in X^*$ 有

$$\|f\| = 1 \Longrightarrow \inf_{z\in M}\|x-z\| \geq f(x) - \sup_{z\in M} f(z)$$

对任意正整数 n，存在 $z_n \in M$ 使得

$$\|x-z_n\| \leq \inf_{z\in M}\|x-z\| + \frac{1}{n}$$

于是

$$f(x) - \sup_{z\in M} f(z) \leq f(x) - f(z_n) \leq \|f\|\|x-z_n\| \leq \inf_{z\in M}\|x-z\| + \frac{1}{n}$$

令 $n\to\infty$ 即得结论。 □

注 5. 先对一般的点讨论最后再取 sup 或 inf，可以看得更清楚。本题说明上一题的结论实际上可以加强为取等。

3 拓展：对凸集分离的进一步理解

3.1 Hahn-Banach 的几何形式

教材上断言凸集分离理论是 Hahn-Banach 定理的几何形式，我们这里给一个具体说明。

定理 4. 由 *Hahn-Banach* 定理可以推出点和凸集的分离定理。

证明. 因为凸集有内点，我们不妨设 0 就是它的内点，此时 E 是吸收凸集

考虑 E 上的 Minkovski 泛函 $P(x)$，则 $P(x)$ 只取有限值。由 $x_0 \neq 0$ 知，X_0=span$\{x_0\}$ 是一个一维子空间。我们在 X_0 上定义有界线性泛函

$$f_0(x) = f_0(\alpha x_0) = \alpha P(x_0)$$

则不难注意到 $f(x_0) = P(x_0) \geq 1$ 且

$$f(x) \leq f(x_0),\ \forall x \in E$$

否则存在 $\tilde{x} \in E$ 使得 $\tilde{x} = \beta x_0$，这里 $\beta > 1$，此时

$$0 \in E, \tilde{x} \in E \Longrightarrow x_0 \in E$$

矛盾！

另一方面，我们有

$$f(x) = \alpha P(x_0) \leq P(\alpha x_0) = P(x),\ \forall x$$

于是有 Hahn-Banach 定理，存在全空间上的有界线性泛函 f 使得

1. $f|_{X_0} = f_0$

2. $f(x) \leq P(x)$

结合

$$P(x) \leq 1,\ \forall x \in E$$

可知 $f^{-1}(1)$ 即可分离 x_0 和 E。 □

3.2 内点的必要性

细心的同学会注意到，我们在凸集分离理论中一直要求至少一个凸集有内点，那么去掉有内点的条件结论还成立吗？答案是不一定。

定理 5 (两个不可分离的凸集). *考虑 $l^2(\mathbb{R})$ 空间的两个子集*

$$E_1 = \{(x_1, \cdots, x_n, \cdots) \mid \exists n \geq 1, s.t.\ i < n \Rightarrow x_i > 0; i \geq n \Rightarrow x_i = 0\}$$
$$E_2 = \{(x_1, \cdots, x_n, \cdots) \mid \exists n \geq 1, s.t.\ i < n \Rightarrow x_i = 0; i \geq n \Rightarrow x_i > 0\}$$

假设有界线性泛函 f 满足

$$f(x) \geq r,\ \forall x \in E_1$$
$$f(x) \leq r,\ \forall x \in E_2$$

则只能有 f 恒为 0 且 $r = 0$

证明. 注意到正数的凸组合还是正数，0 的凸组合还是 0，并且

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda x_n + (1-\lambda) y_n)^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2\lambda^2 x_n^2 + 2(1-\lambda)^2 y_n^2 \leq 2\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} y_n^2$$

于是 E_1 和 E_2 都是凸集。

假设 E_i 有内点 $x = (x_1, \cdots, x_n, \cdots)$，则对于 $\varepsilon > 0$，存在充分大的 n，使得 $x_n < \frac{\varepsilon}{2}$，此时

$$\left(x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n - \frac{\varepsilon}{2}, x_{n+1}, \cdots\right) \notin E_i$$

因此不存在 $\varepsilon_0 > 0$，使得 $B_{\varepsilon_0}(x) \subset E_i$，即 E_i 无内点。

设 f 是 $l^2(\mathbb{R})$ 上的有界线性泛函，则由 Riesz 表示定理，f 可以写成

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$$

这里 $(a_1, \cdots, a_n, \cdots) \in l^2(\mathbb{R})$。

首先注意到 $0 \in E_1$，于是

$$r \leq f(0) = 0$$

但另一方面，由 Cauchy 不等式，若 $x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 0$，则

$$f(x) = \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n x_n \le \left(\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n^2 \right) \left(\sum_{n=k+1}^{\infty} x_n^2 \right) \to 0,\ n \to \infty$$

因此结合 $f(x) \le r$ 恒成立知 $r \ge 0$，最终 r 只能为 0。

假设存在 n 使得 $a_n < 0$，则可取

$$x = (x_1, \cdot, x_n, 0, \cdots) \in E_1$$

其中

$$x_n > -\frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{n-1} a_{n+1} x_{n+1}$$

则 $f(x) < 0$，矛盾！

假设存在 n 使得 $a_n > 0$，则可取

$$x = (0, \cdot, 0, x_n, x_{n+1}, \cdots) \in E_2$$

其中

$$x_n > -\frac{1}{a_n} \sum_{k=n+1}^{\infty} a_{n+1} x_{n+1}$$

则 $f(x) > 0$，同样矛盾！

综上，只能有 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = \cdot = 0$，即 f 恒为 0。这说明 E_1 和 E_2 无法分离。

$\square$