Date Page

2.5.13、考虑 ~~$f_t\in(C[a,b])^*$~~. $f_t(x)\triangleq x(t)$.

则 $|f_t(x)|=|x(t)|\le\max\limits_{t\in[a,b]}|x(t)|=\|x\|$.

从而 $\|f_t\|\le 1$、为有界线性泛函，于是 $f_t\in(C[a,b])^*$.

由 $x_n\xrightarrow{w}x$、$\forall t$、$f_t(x_n)\to f(x)$. 即 $x_n(t)\to x(t)$. ∎

2.5.14 对 x_n、考虑其自然映射下的像 $Jx_n\in X^{**}$.

采用作业题 2.3.7 的命题：若 X、Y 是 B 空间，$A_n\in\mathcal{L}(X,Y)$.

使得 $\forall x\in X$、$\{A_nx\}$ 在 Y 中收敛，则 $\exists A\in\mathcal{L}(X,Y)$.

$A_nx\to Ax$、$\forall x$、且 $\|A\|\le\varliminf\limits_{n\to\infty}\|A_n\|$.

验证上述条件：X^*、X^{**} 皆是 B 空间，由 $x_n\xrightarrow{w}x_0$.

$\forall f\in X^*$. $f(x_n)\to f(x_0)\iff Jx_n(f)\to Jx_0(f)$.

从而 $\|Jx_0\|\le\varliminf\limits_{n\to\infty}\|Jx_n\|$. 即 $\|x_0\|\le\varliminf\limits_{n\to\infty}\|x_n\|$. ∎

2.5.15 $\Longrightarrow$ 将 x_n 视为 H^{**} 中元素

(1) 由 $x_n\xrightarrow{w}x_0$. $\forall f\in H^*$. $x_n(f)\to x_0(f)$.

$\{x_n\}$ 逐点有界，由共鸣定理，$\|x_n\|$ 有界

(2) $f_k(x_n):=(x_n,e_k)\in H^*$. 自然有 $(x_n,e_k)\to(x_0,e_k)$.

$\Longleftarrow$ 因 $\{e_k\}$ 是 H 中稠密子集，由定理 2.5.20 可得

2.5.17 $|(x_n,y_n)-(x_0,y_0)|=|(x_n-x_0+x_0,y_n)-(x_0,y_0)|$

$\le|(x_n-x_0,y_n)|+|(x_0,y_n-y_0)|$.

~~$|(x_n-x_0,y_n)|\le\|x_n-x_0\|\|y_n\|$~~ $|(x_0,y_n-y_0)|\le\|x_0\|\cdot\|y_n-y_0\|\to 0$.

$f_n(x):=(x,y_n)\in H^*$. 再由 $x_n\xrightarrow{w}x_0$. $|(x_n-x_0,y_n)|\to 0$. ∎

2.5.14. HBT. $\exists f \in X^*$. $\|f\|=1$. $f(x_0)=\|x_0\|$.

$f(x_0) = f(\lim$ $\quad f(x_n) \to f(x_0)$.

$$\|x_0\| = \|f(x_0)\| = \|\lim_{n\to\infty} f(x_n)\| \le \varliminf_{n\to\infty} \|f(x_n)\|$$

$$\le \varliminf_{n\to\infty} \|f\|\cdot\|x_n\|$$

$$= \varliminf_{n\to\infty} \|x_n\|.$$

Date Page

2.5.18. $\forall f \in H^*$, 存在 $x \in H$ 满足 $f(e_n) = (x, e_n)$

而 $\forall x \in H$, $f_x(e_n) := (e_n, x) \in H^*$. 于是 $H \cong H^*$.

$\forall x \in H$, 由 Bessel 不等式, $\sum |(x, e_n)|^2 \leq \|x\|^2 < +\infty$,

左侧是收敛的无穷级数, 于是 $\lim\limits_{n\to\infty} (x, e_n) = 0$, 即 $e_n \xrightarrow{w} 0$

2.5.20. 有界 $\Rightarrow$ 弱列紧: 定理 2.5.28.

弱列紧 $\Rightarrow$ 有界.

反证: 设 $\{x_n\} \subset B$, 无界, 则存在子列, 仍记作 $\{x_n\}$,

满足 $\|x_n\| \geq n$.

由弱列紧性, 存在子列弱收敛, 即 $\{x_{n_k}\} \xrightarrow{w} x_0$.

将 x_{n_k} 等同于 B^{**} 中其在自然映射下的像, 则

$\forall f \in B^*$, $x_{n_k}(f) \to x_0(f)$.

x_{n_k} 逐点有界, 由共鸣定理, $\|x_{n_k}\|$ 有界, 与假设矛盾. $\square$