第七次习题课讲义

于俊骜

2024 年 12 月 11 日

目录

1 复习回顾

1.1 紧算子的定义

从第一章开始，我们就一直在强调有界集不一定列紧，而有界闭集不一定自列紧。因此，尽管有界算子在第二章展现了这么多的性质，它依旧跟紧性扯不上任何关系。

对于不少收敛性的结论，如果不紧，那就不对。

定义 1 (紧算子)**.** *若 $T : X \to Y$ 将有界级映成紧集，那么称它为紧算子，记作 $T \in \mathfrak{C}(X, Y)$。*

紧算子显然有界，甚至 $\mathfrak{C}(X, Y)$ 还是 $\mathcal{L}(X, Y)$ 的闭子空间。

它的一个等价判定为**将有界列映成 Cauchy 列**，但这有时候还不好用，因此我们引入全连续的概念。

定义 2 (全连续算子)**.** *若一个算子将弱收敛列映成强收敛列，则称它全连续。特别地，紧算子一定全连续，全连续算子在自反空间里紧。*

另外，还有一类性质更强的算子：

定义 3 (有限秩算子)**.** *若算子 T 满足 $\dim R(T) = r < +\infty$，则称它的秩为 r。有限秩算子显然是紧算子。*

有些时候证明紧算子可以用有限秩算子逼近的方法。

定理 1 (紧算子的性质)**.** *设 $K \in \mathfrak{C}(X)$，则*

1. $T \in \mathcal{L}(X) \Longrightarrow TK, KT \in \mathfrak{C}(X)$
2. $R(K)$ *可分*
3. $K = I \in \mathfrak{C}(X) \Longleftrightarrow \dim X < +\infty$

1.2 Fredholm 理论

这一节的理论刻画了 $I - K$ 型算子的性质，事实上，它是一种特殊的 **Fredholm 算子**。以下定理对一般的 Fredholm 算子也成立。

定理 2 (Riesz-Fredholm). *设 $K \in \mathfrak{C}(X)$，则对于 $T = I - K$，有*

1. $\dim \ker T < +\infty$
2. $R(T)$ 闭
3. T 是单射当且仅当 T 是满射
4. $R(T) = N(T^*)$
5. $\dim \ker T = \dim \ker T^*$

1.3 紧算子的谱

一般有界算子的可以非常复杂，但紧算子就简单得多，甚至可以完整地描述出来。

定理 3 (Riesz-Schauder). *设 $K \in \mathfrak{C}(X)$，则*

1. $\dim X < +\infty \Longrightarrow 0 \in \sigma(K)$
2. $\sigma(K) \backslash \{0\} = \sigma_p(K) \backslash \{0\}$
3. σ_p 至多以 0 为聚点。

作为它的推论，我们得到

定理 4 (紧算子谱的分类). *紧算子的谱只可能出现以下三种情形：*

1. $\sigma = \{0\}$
2. $\sigma = \{0, \lambda_1, \cdots, \lambda_k\}$
3. $\sigma = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_k, \cdots\}$ 且 $\lambda_k \to 0$

关于紧算子的特征子空间也有一些刻画：

定理 5. *紧算子不同特征值的特征向量线性无关，且非零特征值的特征子空间一定有限维。*

2 作业选讲

2.1 习题 2.6.1

证明. 设 $T \in \mathcal{L}(X)$ 为可逆算子，则由 Banach 逆算子定理可知 $\|T^{-1}\| = \|T\|^{-1} < +\infty$. 任取可逆算子 $S \in \mathcal{L}(X)$ 使得 $\|S - T\| < \varepsilon$，则

$$S = T + S - T = T\left(I + T^{-1}(S-T)\right)$$

对于充分小的 $\varepsilon > 0$，有

$$\|T^{-1}(S-T)\| \le \|T^{-1}\|\|S-T\| < \frac{1}{2}$$

于是 S 可逆，且

$$S^{-1} = \left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(T^{-1}(S-T)\right)^k\right)T^{-1}$$

它满足

$$\|S^{-1}\| \le \frac{\|T^{-1}\|}{1 - \|T^{-1}(S-T)\|} < +\infty$$

□

注 1. 类似于“一个方向可导推不出可微”，我们证明它是开集的时候也不能只往 I 一个方向扰动。事实上，至少要往每一个 *Hamel* 基的方向扰动。

2.2 习题 2.6.4

证明. 先计算点谱。设

$$Ax = \lambda x$$

则

$$(x_2, x_3, \cdots) = \lambda(x_1, x_2, \cdots) \Longrightarrow x_{i+1} = \lambda x_i,\ \forall i \ge 1$$

此时可设

$$x=(x_1,\lambda x_1,\lambda^2 x_1,\cdots)\Longrightarrow \|x\|_{l^2}^2=\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^2=|x_1|^2\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^{2i}$$

该级数收敛当且仅当 $|\lambda|<1$。另一方面 $|\lambda|<1$ 时

$$(1,\lambda,\lambda^2,\cdots)\in l^2$$

是 λ 对应的特征向量。因此

$$\sigma_p(A)=\{\lambda\in\mathbb{C}\mid|\lambda|<1\}$$

下设 $|\lambda|=1$。假设 $x\perp R(\lambda I-A)$，则考虑共轭算子

$$0=\langle x,(\lambda I-A)y\rangle=\langle(\bar{\lambda}I-A^*)x,y\rangle,\ \forall\, y\in l^2\Longrightarrow A^*x=\bar{\lambda}x.$$

这里不难验证 A^* 是 l^2 上的右推移算子。此时

$$x_{i+1}=\bar{\lambda}x_i,\ \forall\, i\geq 1$$

结合 $|\bar{\lambda}|=1$ 以及 $x\in l^2$ 可得 $x=0$，这说明

$$\overline{R(\lambda I-A)}=l^2$$

即

$$\mathbb{S}^1\subset\sigma_c(A)$$

下面证明 $\lambda\in\mathbb{S}^1$ 不是正则值。假设

$$\begin{aligned}
y=\lambda x-Ax &\Longrightarrow y_i=\lambda x_i-x_{i+1},\ \forall\, i\geq 1\\
&\Longrightarrow \frac{y_i}{\lambda^{i+1}}=\frac{x_i}{\lambda^i}-\frac{x_{i+1}}{\lambda^{i+1}},\ \forall\, i\geq 1\\
&\Longrightarrow \sum_{i=1}^{k-1}\frac{y_i}{\lambda^{i+1}}=\frac{x_1}{\lambda}-\frac{x_k}{\lambda^k},\ \forall\, i\geq 1\\
&\Longrightarrow x_k=\lambda^{k-1}x_1-\sum_{i=1}^{k-1}\lambda^{k-1-i}y_i
\end{aligned}$$

取 $y=\lambda(x_1-1)e_1$，则

$$x_k=\lambda^{k-1}x_1-(x_1-1)\lambda^{k-1}=\lambda^{k-1},\ \forall\, k\geq 2$$

但此时

$$x=(x_1,\lambda,\lambda^2,\cdots)\notin l^2$$

这说明 $y\in l^2\backslash R(\lambda I-A)$。

最后，注意到

$$\|A^n x\|_{l^2}=\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}|x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}=\|x\|_{l^2}\Longrightarrow\|A^n\|\leq 1$$

即

$$\sigma(A)\subset\{\lambda\in\mathbb{C}\mid|\lambda|<1\}$$

结论得证。 □

注 2. 谱的计算和分类是期末的重难点，建议多熟悉一些例子。

3 拓展：Fredholm 是个啥呢

以下证明大家能看懂就好，一些细节性的东西需要学了 Sobolev 理论才能给出严格的证明。

3.1 Laplace 算子的逆

学了这么久的紧算子，我们还没给出一个具体的例子。

定义 4 (H^1 空间)**.** 定义范数

$$\|u\|_{H^1}=\left(\|u\|_{L^2}^2+\|\nabla u\|_{L^2}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

则所有 H^1 范数有限的函数记为 H^1 空间，它是个 *Hilbert* 空间。特别地，将无穷远处趋于 0 的 H^1 函数的集合记为 H_0^1。

我们考虑最经典的有界区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 上的位势方程

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x), & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

这里 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$。

注 3. 如果边值不为 0，则可以将边值减去，考虑新函数对应的方程。

它的**弱解**定义为所有可以满足

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega fv,\ \forall\, v \in H_0^1(\mathbb{R}^n)$$

的 $u \in H_0^1(\mathbb{R}^n)$。

注 4. 分部积分可知，当 $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ 时这就是原方程的古典解。

在这种定义下可以得到

定理 6 (Laplace 算子逆的紧性)**.** 算子

$$\begin{aligned} (-\Delta)^{-1} : L &\longrightarrow L^2 \\ f &\longmapsto u \end{aligned}$$

是紧的。

注 5. 这个算子良定，因为极值原理保证了对于一个 f，方程至多有一个解。

证明. 记 $K = (-\Delta)^{-1}$，则在弱解的定义中取 $v = u$，由 Cauchy 不等式可得

$$\int |\nabla u|^2 = \int fu \le \|f\|_2 \|u\|_2 \le C\|f\|_2 \|\nabla u\|_2$$

于是

$$\|u\|_{H^1}^2 = \|u\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2 \le (1 + C^2)\|\nabla u\|_2^2 \le C(1 + C^2)\|f\|_2 < +\infty$$

这说明 K 将 L^2 中的有界集映为 H_0^1 中的有界集。由 Arzela-Ascoli 定理可以证明 H_0^1 中的有界集是 L^2 中的有界集，从而 $K \in \mathfrak{C}(L^2)$. $\square$

接下来我们就可以对 K 使用 Fredholm 理论了。

定理 7. 对于边值为 0 的非线性椭圆方程

$$-\Delta u = au + f$$

它有解当且仅当它对应的齐次方程只有零解。

证明. 考虑 $I - \frac{1}{a}K$ 即可。 □

它可以推出一个更好用的结论：

定理 8 (弱解第二存在性定理)**.** 上述方程有弱解当且仅当对于任意齐次方程的解 v，都有 $v \perp f$。

证明. 事实上

$$\begin{aligned}
\Delta u + u = -f \text{ 有解} &\iff f \in R(I + \Delta) \\
&\iff g = (I + \Delta)^{-1} f \in R(I - K) \\
&\iff g \in (N(I - K))^{\perp} \\
&\iff g \perp v,\ \forall v \in N(I - K)
\end{aligned}$$

□

有了这个定理，我们来看每年麻方程必考的一个题型：求 a 使得

$$\begin{cases} \Delta u + \frac{5}{4}u = x - a\sin x, & x \in \Omega = [0, 2\pi]^2 \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

证明. 考虑它对应的齐次方程

$$\begin{cases} \Delta u + \frac{5}{4}u = 0, & x \in \Omega = [0, 2\pi]^2 \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

则分离变量，由 Sturm-Liouville 定理可知特征值 $\frac{5}{4}$ 对应的特征子空间为

$$\operatorname{span}\left\{\sin\frac{x}{2}\sin y,\ \sin x\sin\frac{y}{2}\right\}$$

计算积分

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}(x-a\sin x)\sin\frac{x}{2}\sin y=0$$
$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}(x-a\sin x)\sin x\sin\frac{y}{2}=0$$

可得 $a=-2$，即原方程有解当且仅当 $a=-2$。 □

3.2 椭圆特征值理论

沿用前面的记号 $K=(-\Delta)^{-1}$，由紧算子的谱理论有

$$\sigma(K)=\{\lambda_i\}$$

有限或可数并趋于 0。进一步地

$$Ku=\lambda_i u\Longleftrightarrow \Delta u=-\frac{1}{\lambda_i}u$$

这说明特征值问题

$$\Delta u+\mu u=0$$

有非零解当且仅当 $\mu=\frac{1}{\lambda_i}$。由极值原理容易得到负 Laplace 算子的特征值为

$$0<\mu_1\le\mu_2\le\mu_3\le\cdots$$

由此，我们得到：

定理 9 (弱解第三存在性定理). *存在一个至多可数集 $\Sigma=\{\mu_i\}$，使得方程*

$$\begin{cases}-\Delta u=\mu u+f, & x\in\Omega\\ u=0, & x\in\partial\Omega\end{cases}$$

对任意 $f\in L^2$ 都有解。特别地，若 Σ 是无穷集，则它是一列趋于正无穷的正数。

紧算子谱理论的另一重要应用是我们来不及学的 3.4 节。

定理 10 (Hilbert-Schmidt). *设 X 为 Hilbert 空间且自伴算子 $T\in\mathfrak{C}(X)$，则 T 的所有单位特征向量构成 $C(X,Y)$ 的一组规范正交基。*

注意到

$$\begin{aligned}\Delta u+\mu u=0 &\Longrightarrow u\Delta u+\mu u^2=0\\ &\Longrightarrow \int u\Delta u+\mu\int u^2=0\\ &\Longrightarrow \int|\nabla u|^2=\mu\int u^2\end{aligned}$$

结合极值原理，我们得到

定理 11 (特征值的刻画)**.** *Laplace* 算子的特征值为

$$0<\mu_1\leq\mu_2\leq\mu_3\leq\cdots$$

其中

$$\mu_1=\inf_{u\in H_0^1}\frac{\int|\nabla u|^2}{\int u^2}$$

进一步还有

$$\mu_2=\inf_{\substack{u\in H_0^1\\ u\perp u_1}}\frac{\int|\nabla u|^2}{\int u^2}$$

这里 u_1 为第一特征值对应的特征向量。

注 6. 利用进一步知识，可以证明 $\mu_1<\mu_2$。