习题课

HW: 对 $g\in L^1$. 如果 $\exists C>0$ s.t. $|\int fg|\le C\|f\|_{L^p}$ $\forall f\in L^\infty$.

则 $g\in L^{p'}$ 且 $\|g\|_{L^{p'}}\le C$.

pf (p=1 case). 令 $E_k=\{|g|>C+\frac{1}{k}\}$

若结论不成立，则 $\exists k$ s.t. $\mu(E_k)>0$.

由于 Ω 是 σ 有限的，不妨设 $\mu(E_k)<+\infty$ (否则可考虑 $E_k\cap\Omega_n$)

∴ 考虑 $f_k=\chi_{E_k}\,\mathrm{sgn}(g)$.

∴ $f_k\in L^\infty$ $\|f_k\|_{L^1}=\mu(E_k)$.

且 $f_kg=|g|\chi_{E_k}\ge(C+\frac{1}{k})\chi_{E_k}$.

∴ $|\int f_kg|\ge(C+\frac{1}{k})\mu(E_k)>C\mu(E_k)=C\|f_k\|_{L^1}$ 矛盾!

∴ $\forall k$, $\mu(E_k)=0$ $\Rightarrow$ $\operatorname{ess\,sup}|g|\le C$, 即 $g\in L^\infty$, $\|g\|_{L^\infty}\le C$. □

2.5.5. X 是 B 空间. 则 X 自反 $\Leftrightarrow$ X^* 自反.

pf: $\Rightarrow$. 由 X 自反 ∴ $J: X\to X^{**}$, $x\mapsto J_x$, $J_x(f)=f(x)$, $\forall f\in X^*$ 是满射.

并考虑 $\tilde{J}: X^*\to X^{***}$, $f\mapsto\tilde{J}_f$, $\tilde{J}_f(A)=A(f)$ $\forall A\in X^{**}$. 只需证 $\tilde{J}$ 是满射即可.

任取 $\mathcal{B}\in X^{***}$, 由 $J: X\to X^{**}$. $J^*: X^{***}\to X^*$.

∴ 令 $f=J^*(\mathcal{B})\in X^*$. ∴ 对 $\forall A\in X^{**}$ 由 J 满, $\exists x\in X$ s.t. $A=J_x$

∴ $\mathcal{B}(A)=\mathcal{B}(J_x)=J^*(\mathcal{B})(x)=f(x)=J_x(f)=A(f)$.

∴ $\mathcal{B}=\tilde{J}_f$ $\Rightarrow$ $\tilde{J}$ 是满射

$\Leftarrow$: 已知 $\tilde{J}$ 是满射. 要证 J 是满射.

因为 X^* 自反 由 ($\Rightarrow$). X^{**} 自反

∵ J 为 $X\to X^{**}$ 的等距嵌入. X 完备 $\Rightarrow$ $J(X)$ 为闭子空间

∴ 由 Pettis. $J(X)$ 自反 $\Rightarrow$ X 自反 □. (2.5.6).

(*).

Rmk (*): $\varphi: A \to B$ 为等距同构 则 A 自反 $\Rightarrow$ B 自反.

pf: 易验证 $\varphi^*: B^* \to A^*$ 为等距同构 (满射: $\forall f \in A^*$, 令 $g(y) = f(\varphi^{-1}y)$, 则 $f = \varphi^* g$)

对 $J_B: B \to B^{**}$, $y \mapsto J_{B,y}$. $\quad J_{B,y}(g) = g(y) \quad \forall g \in B^*$.

令 $\tilde{J}_A: A \to A^{**}$, $x \mapsto \tilde{J}_{A,x}$ $\quad \tilde{J}_A = (\varphi^{-1})^{**} \circ J_B \circ \varphi$.

$\therefore$ 对 $\forall x \in A$ $\quad \tilde{J}_{A,x} = (\varphi^{-1})^{**}(J_{B,\varphi(x)})$.

$\therefore \forall f \in A^*$ $\quad \tilde{J}_{A,x}(f) = (\varphi^{-1})^{**}(J_{B,\varphi(x)})(f)$

$$= J_{B,\varphi(x)}((\varphi^{-1})^* f)$$

$$= (\varphi^{-1})^* f(\varphi(x)) = f(\varphi^{-1} \circ \varphi(x)) = f(x)$$

$$= J_{A,x}(f)$$

$\therefore \tilde{J}_{A,x} = J_{A,x} \Rightarrow \tilde{J}_A$ 同构 $\Rightarrow J_B$ 同构 □

2.5.6. 即证: $\varphi: X \to Y$ 为等距嵌入 (X 是 B^* 空间, Y 是 B 空间)
则 $\varphi(X)$ 闭 $\Leftrightarrow$ X 完备.

pf: $\Rightarrow$. $\varphi: X \to \varphi(X)$ 为等距同构

对 $\{x_n\}$ 为 Cauchy 列 $\Rightarrow \{\varphi(x_n)\}$ 为 Cauchy 列.

$\overset{(Y完备)}{\Rightarrow} \varphi(x_n) \to y \in Y \overset{(\varphi(X)闭)}{\Rightarrow} y \in \varphi(X) \Rightarrow y = \varphi(x)$, $\exists x \in X$

由于等距 $\therefore \|x_n - x\| = \|\varphi(x_n) - \varphi(x)\| \to 0$

$\Rightarrow x_n \to x \Rightarrow X$ 完备.

$\Leftarrow$: 对 $y_n = \varphi(x_n) \to y$.

$\overset{(等距)}{\Rightarrow} \{x_n\}$ 为 Cauchy 列 $\overset{(X完备)}{\Rightarrow} x_n \to x \in X$.

$\overset{(等距)}{\Rightarrow} \varphi(x_n) \to \varphi(x) \Rightarrow y = \varphi(x) \in \varphi(X) \Rightarrow \varphi(X)$ 闭 □

证明：l^1 不为自反空间

pf: 否则. 若 l^1 自反 则 $(l^1)^{**} \cong l^1$ 可分.

但 $(l^1)^{**} = (l^\infty)^*$

由 Banach $\Rightarrow$ l^∞ 可分. 矛盾! $\therefore l^1$ 不自反.

Rmk: l^1 可分: $\bigcup_{n=1}^{+\infty} \{(p_1, \cdots p_n, 0, \cdots 0, \cdots) \in l^1 \mid p_1 \cdots p_n \in \mathbb{Q}\}$

为 l^1 的可数稠密子集

l^∞ 不可分: $\{\chi_A\}_{A \subseteq \mathbb{N}}$. 为 l^∞ 的不可数子集

其中: $\chi_{A,n} = \begin{cases} 1 & \text{if } n \in A. \\ 0 & \text{else.} \end{cases}$

$\therefore \|\chi_A - \chi_{A'}\|_{l^\infty} = 1$ if $A \neq A'$.

补充:

1、 Hilbert空间为自反空间. (为书写方便, 只考虑 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

Lemma: Hilbert空间 H 到 H^* 有等距同构.

pf of Lemma: 考虑 $\varphi: H \to H^*$ $\quad f_x(y) = (x, y)$

$x \mapsto f_x$

显然 φ 良定, 单射, 等距. 由Riesz和 φ 满. □

pf of 1: (错误证法)

由 Lemma. $H \cong H^*$, $H^* \cong H^{**}$ $\Rightarrow$ $H \cong H^{**}$ $\Rightarrow$ H 自反 (X)

(正确证法)

考虑 φ 为 Lemma 中定义, 以及 $\tilde{\varphi}: H^* \to H^{**}$. $\quad A_f(g) = (f, g)$.

$f \mapsto A_f$.

由 Lemma. φ. $\tilde{\varphi}$ 为等距同构 $\Rightarrow$ $T = \tilde{\varphi} \circ \varphi$ 也是等距同构.

对 $\forall x \in H$. $Tx = \tilde{\varphi}(\varphi(x)) = \tilde{\varphi}(f_x) \in H^{**}$.

$\therefore$ 对 $\forall g \in H^*$. 令 $y = \varphi^{-1}(g) \in H$.

$\therefore Tx(g) = \tilde{\varphi}(f_x)(g) = (f_x, g) = (\varphi^{-1} f_x, \varphi^{-1} g)$ (因为等距同构保内积)

$= (x, y) = \varphi(y)(x) = g(x)$ $\Rightarrow$ $T = J$ 为等距同构

$\therefore H$ 为 ~~Hilbert~~ 自反空间 □

扫描全能王 创建

Rmk: 存在 Banach 空间 X 满足 $X \cong X^{**}$，但 X 不自反

例: $X = \{ x \in c_0 \mid \sup\limits_{p\in\mathcal{P}} \|x\|_{p} < +\infty \}$. (不验证)

其中 c_0 为以 0 为极限的数列

$\mathcal{P} = \{ (p_1, \cdots, p_{2n+1}) \mid p_1 < p_2 < \cdots < p_{2n+1},\ p_i \in \mathbb{N}_+ \}$.

$$\|x\|_{p} = \left(x_{p_{2n+1}}^2 + \sum_{m=1}^{n} (x_{p_{2m-1}} - x_{p_{2m}})^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

2. 一致凸 B空间是自反的.

Def: X 为 B^* 空间. 若 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ s.t. $\forall x, y \in X$, $\|x\|, \|y\| \le 1$, $\|x-y\| \ge \varepsilon$. 有 $\left\| \frac{x+y}{2} \right\| < 1-\delta$ 则称 X 是一致凸的.

Rmk: 内积空间是一致凸的.

Lemma. X 为 B空间, $f_1 \cdots f_n \in X^*$, $\alpha_1 \cdots \alpha_n \in \mathbb{K}$, $\gamma > 0$. TFAE.

(1) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x_\varepsilon \in X$ s.t. $f_i(x_\varepsilon) = \alpha_i$, $i \le n$ 且 $\|x_\varepsilon\| < \gamma + \varepsilon$.

(2) $\forall \beta_1 \cdots \beta_n \in \mathbb{K}$ 有 $\left| \sum_{i=1}^n \beta_i \alpha_i \right| \le \gamma \left\| \sum_{i=1}^n \beta_i f_i \right\|$.

pf of Lemma: (1) $\Rightarrow$ (2). 对 $\forall \beta_1 \cdots \beta_n$ $\forall \varepsilon > 0$, 取 (1) 中的 x_ε.

$$\left| \sum_{i=1}^n \beta_i \alpha_i \right| = \left| \sum_{i=1}^n \beta_i f_i(x_\varepsilon) \right| \le \|x_\varepsilon\| \left\| \sum_{i=1}^n \beta_i f_i \right\| < (\gamma+\varepsilon) \left\| \sum_{i=1}^n \beta_i f_i \right\|.$$ 令 $\varepsilon \to 0$.

(2) $\Rightarrow$ (1). $n=1$ 时，由范数定义，结论显然

对一般的 n，若 $f_1 \cdots f_n$ 线性相关 不妨设 $f_n = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i f_i$

令 $\alpha = \alpha_n - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \alpha_i$

$\therefore$ (2) $\Rightarrow$ $\left| \sum_{i=1}^{n-1} (\beta_i + \beta_n \lambda_i) \alpha_i + \beta_n \alpha \right| \le \gamma \left\| \sum_{i=1}^{n-1} (\beta_i + \beta_n \lambda_i) f_i \right\|$.

取 $\beta_n = 1$, $\beta_i = -\lambda_i$ $\therefore |\alpha| = 0$ $\therefore$ 此时可化为 $n-1$ 的情况.

$\therefore$ 不妨设 $f_1 \cdots f_n$ 线性无关 $\therefore \varphi: X \to \mathbb{K}^n$, $x \mapsto (f_1(x), \cdots, f_n(x))$.

若 φ 不满 即 $\mathrm{Im}\varphi$ 是 $\mathbb{K}^n$ 的真闭子空间. 而 $\mathbb{K}^n$ 为 Hilbert 空间

$\therefore \exists y = (y_1 \cdots y_n)$ 非0 $y \in (\mathrm{Im}\varphi)^\perp$. 即 $\sum_{i=1}^n f_i(x) y_i = 0$ $\forall x$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^n f_i y_i = 0$. 与 f_i 线性无关矛盾 $\therefore \varphi$ 满

$\therefore \varphi$ 是开映射. 令 $S_\varepsilon = \{ x \in X \mid \|x\| < \gamma + \varepsilon \}$ 为开集 $\Rightarrow \varphi(S_\varepsilon)$ 为开集

假设(1)不成立. 即 $(\alpha_1,\cdots\alpha_n)\notin\varphi(S_n)$. 由于 $\varphi(S_\varepsilon)$ 为真凸开集, $0\in\varphi(S_\varepsilon)$

∴由Hahn-Banach几何形式（复情形类比于胡教授上次习题课讲义的3.1）

∃ $\mathbb{K}^n$ 上有界线性泛函 F s.t. $|F(\alpha_1,\cdots\alpha_n)|\geq\sup\limits_{x\in S_\varepsilon}|F\circ\varphi(x)|$.

而 F 是 $\mathbb{K}^n$ 上有界线性泛函 ∴ ∃ β_i s.t. $F(\alpha_1,\cdots\alpha_n)=\sum\limits_{i=1}^n\alpha_i\beta_i$

$\gamma\|\sum\limits_{i=1}^n\beta_if_i\|\geq|\sum\limits_{i=1}^n\alpha_i\beta_i|\geq\sup\limits_{x\in S_\varepsilon}|\sum\limits_{i=1}^n\beta_if_i(x)|=(\gamma+\varepsilon)\|\sum\limits_{i=1}^n\beta_if_i\|$ 矛盾! □.

Pf of 2: 给定 $x_0^{**}\in X^{**}$ 且不妨设 $\|x_0^{**}\|=1$.

∴由定义, $\forall n$ ∃ $x_n^*\in X^*$ s.t. $|x_0^{**}(x_n^*)|\geq 1-\frac{1}{n}$. 其中 $\|x_n^*\|=1$.

∴在Lemma中取 $f_i=x_i^*$, $\alpha_i=x_0^{**}(x_i^*)$ $\gamma=1$. 对 $\forall\beta_i$.

有 $|\sum\limits_{i=1}^n\beta_i\alpha_i|=|x_0^{**}(\sum\limits_{i=1}^n\beta_ix_i^*)|\leq\|\sum\limits_{i=1}^n\beta_ix_i^*\|$.

∴由Lemma, 对 $\forall n$, ∃ $x_n\in X$ s.t. $\alpha_i=x_0^{**}(x_i^*)=x_i^*(x_n)$. $\forall i\leq n$.

且 $\|x_n\|\leq 1+\frac{1}{n}$.

∴ $1-\frac{1}{n}\leq|x_0^{**}(x_n^*)|=|x_n^*(x_n)|\leq\|x_n\|\|x_n^*\|=\|x_n\|\leq1+\frac{1}{n}$

∴ $\lim\limits_{n\to+\infty}\|x_n\|=1$.

∴对 $\forall p\geq0$.

$2(1-\frac{1}{n})\leq2|x_0^{**}(x_n^*)|=|x_0^{**}(2x_n^*)|$

$=|x_0^{**}(x_n^*)+x_0^{**}(x_n^*)|$

$=|x_n^*(x_n)+x_n^*(x_{n+p})|$

$\leq\|x_n^*\|\|x_n+x_{n+p}\|\leq2(1+\frac{1}{n})$

∴ $\lim\limits_{m,n\to+\infty}\|x_n+x_m\|=2$. 即 $\lim\limits_{n,m\to+\infty}\|\frac{x_n+x_m}{2}\|=1$.

由一致凸. $\{x_n\}$ 为Cauchy列. ∴ $x_n\to x_0$ ⇒ $\|x_0\|=1$.

且 $x_0^{**}(x_i^*)=x_i^*(x_n)$ 令 $n\to+\infty$.

∴ $x_0^{**}(x_n^*)=x_n^*(x_0)$ $\forall n\geq1$.

下证 x_0 是满足 $x_0^{**}(x_n^*)=x_n^*(x_0)$ $\forall n\geq2$. $\|x_0\|=1$ 的唯一点.

若还有 x_0' 满足 则 $\forall n$.

$2(1-\frac{1}{n})\leq2|x_0^{**}(x_n^*)|=|x_n^*(x_0+x_0')|\leq\|x_0+x_0'\|$

⇒ $\|x_0+x_0'\|\geq2$ 由 X 严格凸 ⇒ $x_0'=x_0$.

即固定 x_1^*. $n\geq2$. x_0 与 x_1^* 的选取无关

由 x_1^* 的定义 它可以取遍所有 X^* 中单位球面上的点.

∴ $\forall x^*\in X^*$. $\|x^*\|=1$

有 $x_0^{**}(x^*)=x^*(x_0)$ ∴ 了满 □.

Cor. Hilbert空间是自反的.