Date Page

反例1：存在 Banach 空间上，非零连续线性泛函，

在单位闭球上取不到最大值（即不存在 x，$\|f\| = \frac{|f(x)|}{\|x\|}$

Banach Space：c_0：全体收敛于0的数列，取 l^∞ 范数。

f：$f(x) \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n}{n!}$

则 $|f(x)| \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ $\|f\| \le \sum \frac{1}{n!}$

再取 $x_m = (\underbrace{1, \cdots, 1}_{\text{前}m\text{个}}, 0, \cdots, 0)$，$|f(x_m)| = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n!}$ $\forall m$.

从而 $\|f\| = \sum \frac{1}{n!}$

若 $\underset{\|x\|=1}{|f(x)|} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$，则只能 $x = (1, 1, \cdots, 1) \notin c_0$.

反例2：逆算子定理中满射的必要性

考虑 $X = Y = C[0,1]$，$Tx = \int_0^t x(s)\,ds$.

则 $TX = M = \{y \in C'[0,1] \mid y(0) = 0\}$ 是 Y 中疏集.

$T^{-1} = \frac{d}{dt}$ 是无界算子.

例3：定义域不必闭的闭算子

$X = C[0,1]$，$D(T) = C'[0,1]$，$T = \frac{d}{dt}$

若 $x_n \in D(T)$，$x_n \to x$，$Tx_n \to y$.

则 $x(t) = x(0) + \int_0^t y(s)\,ds$，即 $x \in D(T)$，且 $Tx = y$.

2.3.1. φ 是满射. 且 $\|\varphi(x)\| = \inf\limits_{y\in[x]} \|y\| \leqslant \|x\|$.

从而 $\varphi \in \mathcal{L}(X, X/X_0)$. φ 是开映射. $\square$

2.3.2. 若 $Ux=0$. 由 $\|Ux\| \geqslant m\|x\|$. $x=0$. 从而 U 单. 有逆

$\forall y \in Y$. $Ux=y$ 有解. 从而 U 满

由逆映射定理. U 有连续逆 U^{-1}.

且 $\|y\| \geqslant m\|U^{-1}y\|$. $\Rightarrow \|U^{-1}\| \leqslant \frac{1}{m}$ $\square$

2.3.3. 若 $Ax=0$. 则 $m\|x\|^2 \leqslant |(Ax,x)| = 0$. $x=0$. A 单. 有逆

同时. 若 $x \in R(A)^{\perp}$. 则 $(Ax,x)=0$ 同样有. $x=0$ 于是 $R(A)^{\perp}=\{0\}$.

只要证 $R(A)$ 闭

设 $\{Ax_n\}$ 是 $R(A)$ 中 Cauchy 列. 则由

$m\|x\|^2 \leqslant |(Ax,x)| \leqslant \|x\|\cdot\|Ax\| \Rightarrow \|x\| \leqslant \frac{1}{m}\|Ax\|$.

$\{x_n\}$ 是 H 中 Cauchy 列. 设其极限为 x. 则 $Ax_n \to Ax \in R(A)$.

于是 $R(A)$ 闭. $R(A) = \overline{R(A)} = \{0\}^{\perp} = H$. A 满.

由逆映射定理. $\exists A^{-1} \in \mathcal{L}(H)$ $\square$

2.3.4. (1). 若 $x_n \to x$. $Ax_n \to y$. 由 D 闭知 $x \in D$.

由 A 连续知. 有 $Ax_n \to Ax$. 于是 $Ax=y$. A 闭

(2). 任取 $x_n \to x$. $Ax_n \to y$. 由 Y 闭知 $y \in Y$.

由 A 闭知 $x \in D$. $Ax=y$. $\{x_n\}$ 可以是任意的. 从而 D 闭

(3). $D(A^{-1}) \ni y_n \to y$. $A^{-1}y_n \to x \Leftrightarrow$. $\underset{A^{-1}y_n}{\overset{\shortparallel}{x_n}} \to x$. $Ax_n \to y$

由 A 闭. $x \in D(A)$. 且 $Ax=y$.

即 $y \in D(A^{-1})$. $A^{-1}y = x$. 从而 A^{-1} 闭

(4). 由(3). A 单射. 闭 $\Rightarrow A^{-1}$ 闭

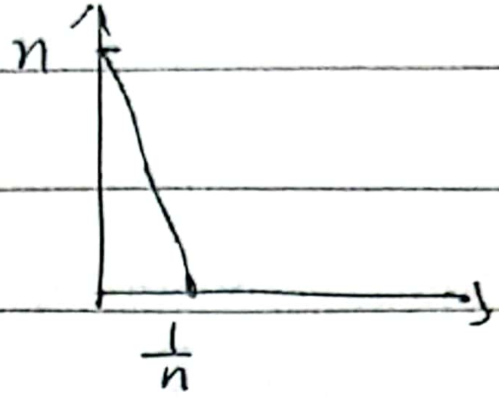
由(2). A^{-1} 闭. 连续. X 完备 $\Rightarrow D(A^{-1}) = R(A)$ 闭.

$R(A) = \overline{R(A)} = Y$. $\square$

2.3.15 、 $C[0,1]$ 在范数 $\|f\| = \max\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$ 下完备。

由等价范数定理，若 $(C[0,1], \|\cdot\|_1)$ 是闭空间，则 $\|\cdot\|, \|\cdot\|_1$ 等价。

考虑 $f_n(x) = \begin{cases} n - n^2 x, & x \in [0, \frac{1}{n}]. \\ 0, & x \in (\frac{1}{n}, 1]. \end{cases}$



则 $\|f_n\| = n$， $\|f_n\|_1 = \frac{1}{2}$

由n任意性知 $\cancel{\|f_n\|, \|f\|}$ $\|\cdot\|, \|\cdot\|_1$ 不等价。

从而 $(C[0,1], \|\cdot\|_1)$ 不完备。 □