1.6.5、设M是Hilbert空间X子集，求证

$$(M^{\perp})^{\perp}=\overline{\operatorname{span}M}$$

Pf: $x\in M^{\perp}\Rightarrow x\in(\operatorname{span}M)^{\perp}\Rightarrow x\in(\overline{\operatorname{span}M})^{\perp}$.

而若$x\in(\overline{\operatorname{span}M})^{\perp}$、自然有$x\in M^{\perp}$、从而$M^{\perp}=(\overline{\operatorname{span}M})^{\perp}$.

故等价于证$(\overline{\operatorname{span}M}^{\perp})^{\perp}=\overline{\operatorname{span}M}$

任取$x\in\overline{\operatorname{span}M}$，$y\in\overline{\operatorname{span}M}^{\perp}$. 有$(y,x)=0$. 从而$x\in(\overline{\operatorname{span}M}^{\perp})^{\perp}$

即 $\overline{\operatorname{span}M}\subset(\overline{\operatorname{span}M}^{\perp})^{\perp}$

若$\exists x\in(\overline{\operatorname{span}M}^{\perp})^{\perp}\setminus\overline{\operatorname{span}M}$. 由正交分解.

$\exists y\in\overline{\operatorname{span}M}$. $z\in\overline{\operatorname{span}M}^{\perp}$. $x=y+z$. ~~$y\neq0$~~. $z\neq0$.

则对任意. $u\in\overline{\operatorname{span}M}^{\perp}$.

$0=(x,u)=(y,u)+(z,u)=(z,u)\neq0$. 矛盾.

从而$(\overline{\operatorname{span}M}^{\perp})^{\perp}=\overline{\operatorname{span}M}$. $\square$

6.6. $L^2[-1,1]$中. 偶函数集的正交补

Pf: 奇函数集(的等价类)

任取f为偶函数、并设$g\in L^2[-1,1]$满足$(f,g)=0$.

即. $\int_{-1}^{1}f(x)\overline{g(x)}dx=0$.

$$\int_{-1}^{1}f(x)\overline{g(x)}dx=\int_{-1}^{0}+\int_{0}^{1}f(x)\overline{g(x)}dx$$

$$=\int_{0}^{1}f(x)[\overline{g(-x)}+\overline{g(x)}]dx$$

$f(x)$在$[0,1]$上可以是任意的(只要对应调整$[-1,0]$上的部分).

从而可以取$f(x)$在$[0,1]$上等于$g(-x)+g(x)$.

就有. $\int_{0}^{1}|g(-x)+g(x)|^2dx=0$.

$g(-x)=-g(x)$ a.e.

即g是奇函数的等价类. $\square$

1.6.7. $L^2[a,b]$中. $S=\{e^{2\pi inx}\}$.

(1) 若 $|b-a|\leq 1$，求证 $S^\perp=\{\theta\}$.

(2) 若 $|b-a|>1$、求证 $S^\perp\neq\{\theta\}$. L^2空间.

Pf: (1)、$S=\{e^{2\pi inx}\}$ 是长度为1 区间上的正交规范基.

从而若 $|b-a|=1$. $S^\perp=\{\theta\}$.

若 $|b-a|<1$. S是 $[a,a+1]$上 正交规范基.

设 $f\in L^2[a,b]\cap S^\perp$. 将 f延拓为 $[a,a+1]$上函数.

$$\tilde{f}=\begin{cases} f, & x\in[a,b] \\ 0 & x\in(b,a+1] \end{cases}.$$

则 $\forall n$. $\int_a^{a+1}\tilde{f}\cdot e^{2\pi inx}dx=\int_a^b f\cdot e^{2\pi inx}dx=0$.

从而 $\tilde{f}\in S^\perp$. $\tilde{f}=\theta$.. 只能是 $f=\theta$

(2)、若 $|b-a|>1$、构造 $f\in S^\perp$ 且 $f\neq\theta$.

考虑 $f=\begin{cases} 1. & [a,b-1] \\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}a_ne^{2\pi inx} & [b-1,b] \end{cases}$. a_n待定.

实际上，$\forall k$. $(f,\overline{e^{2\pi ikx}})=0$.

即. $0=\int_a^{b-1}\overline{e^{2\pi ikx}}dx+\int_{b-1}^b\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n e^{2\pi inx}\cdot\overline{e^{2\pi ikx}}dx$,

$=\int_a^{b-1}e^{2\pi ikx}dx+a_k$.

从而 $a_k=-\int_a^{b-1}\overline{e^{2\pi ikx}}dx$. 得到$f$. $\square$

1.6.9. 设 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 Hilbert 空间 X 中两个正交规范集. 满足 $\sum_{n=1}^{\infty}\|e_n-f_n\|^2<1$.

求证: 一个完备蕴含另一个完备

Pf: 只需证 $\{e_n\}$ 完备 $\Rightarrow$ $\{f_n\}$ 完备.

反证. 若 $\{f_n\}$ 不完备. 则有 $u\neq\theta$. 但 $\forall n$. $(u,f_n)=0$.

则 $\|u\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|(u,e_n)|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|(u,e_n-f_n)+(u,f_n)|^2$.

$=\sum_{n=1}^{\infty}|(u,e_n-f_n)|^2$

$\leq(\sum_{n=1}^{\infty}\|e_n-f_n\|^2)\cdot\|u\|^2$.

$<\|u\|^2$. 矛盾.

从而 $\{f_n\}$ 完备. $\square$.

1.6.10. 设 X 是 Hilbert 空间. X_0 是 X 闭线性子空间. $\{e_n\}$. $\{f_n\}$. 分别为 X_0. $X_0^{\perp}$ 正交规范基.

求证: $\{e_n\}\cup\{f_n\}$ 是 X 正交规范基.

Pf: $\forall x\in X$. 有正交分解. $x=y+z$. $y\in X_0$. $z\in X_0^{\perp}$.

因 $\{e_n\}$. $\{f_n\}$ 为 X_0. $X_0^{\perp}$ 上 正交规范基.

$y=\sum(y,e_n)e_n$. ~~$z=(\sum(z,e_n)$~~ $z=\sum(z,f_n)f_n$.

而. $(x,e_n)=(y+z,e_n)=(y,e_n)$.

$(x,f_n)=(y+z,f_n)=(z,f_n)$.

从而有. $x=\sum(x,e_n)e_n+\sum(x,f_n)f_n$.

$\{e_n\}\cup\{f_n\}$ 为一组基. 且显然仍正交规范. $\square$.

1.6.11. $H^2(D)=\{u在D内解析 \mid \iint_D |u(z)|^2\,dxdy<\infty\}$.

内积定义为 $(u,v)=\iint_D u(z)\overline{v(z)}\,dxdy$.

且有正交规范基. $\varphi_n(z)=\sqrt{\frac{n}{\pi}}\, z^{n-1}$. (Bergman 空间)

(1). 若 $u(z)$ 的 Taylor 展式为 $u(z)=\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$.

求证: $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|b_k|^2}{1+k}<\infty$.

(2). 设 $u,v\in H^2(D)$. $u(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^k$. $v(z)=\sum_{k=0}^{\infty}b_k z^k$.

求证: $(u,v)=\pi\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k\overline{b_k}}{k+1}$.

(3) 设 $u(z)\in H^2(D)$. 求证:

$$|u(z)|\le\frac{\|u\|}{\sqrt{\pi}(1-|z|)}.$$

(4) $H^2(D)$ 是 Hilbert 空间

解: (1). $u(z)=\sum_{k=0}^{\infty}b_k z^k=\sum_{n=1}^{\infty}b_{n-1}\sqrt{\frac{\pi}{n}}\,\varphi_n(z)$.

从而 $\iint_D |u(z)|^2\,dxdy=\cancel{\sum_{n=0}^{\infty}b_n^2}\ \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\pi b_k^2}{k+1}<\infty$.

(2). $u(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}\sqrt{\frac{\pi}{n}}\,\varphi_n(z)$. $v(z)=\sum_{n=1}^{\infty}b_{n-1}\sqrt{\frac{\pi}{n}}\,\varphi_n(z)$.

$(u,v)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\pi\cdot a_k\cdot\overline{b_k}}{k+1}$.

(3). 设 $u(z)=\sum_{k=0}^{\infty}b_k z^k$. 则

$$|u(z)|\le\sum_{k=0}^{\infty}|b_k||z|^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|b_k|}{\sqrt{1+k}}\cdot\sqrt{1+k}\,|z|^k$$

$$\le\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|b_k|^2}{1+k}\Big)^{\frac12}\cdot\Big(\sum_{k=0}^{\infty}(1+k)|z|^{2k}\Big)^{\frac12}$$

$$=\Big(\frac{\|u\|^2}{\pi}\Big)^{\frac12}\cdot\Big(\frac{1}{(1-|z|^2)^2}\Big)^{\frac12}$$

$$=\frac{\|u\|}{\sqrt{\pi}(1-|z|^2)}$$

$$\le\frac{\|u\|}{\sqrt{\pi}(1-|z|)}.$$

Montel定理: 解析函数族 $\{f_\lambda\}_{\lambda\in I}$ 内闭一致有界 $\Leftrightarrow$ $\underbrace{\text{是正规族}}_{\text{有子列内闭一致收敛}}$.

是Arzela-Ascoli定理推论. 将用于第四问

(4) 设 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是依 $H^2(D)$ 上诱导度量的 Cauchy 列

一方面、诱导出的度量实际也是 L^2 度量. 从而在 $L^2(D)$ 中

存在极限函数. u

另一方面. 任取 $z\in D$. 令 $r=1-|z|$. 则在 $\overline{B(z,\rho)}$ 上 $(\rho<r)$.

由 (3) 得. $|u_n-u_m|\leq C\|u_n-u_m\|$.

Cauchy 列有界. 故 $\{u_n\}$ 在 D 上局部一致有界

由 Montel 定理, $\{u_n\}$ 是正规族. 于是其有子列一致

收敛至某解析函数 $\tilde{u}$. (因是 Cauchy 列, 实际上就是

$\{u_n\}$ 一致收敛).

因 $\iint_D |u_n-u|^2 dxdy \to 0$. 故有子列 $\{u_{n_k}\}$ a.e ~~一致~~收敛

至 u. 由极限唯一性. 知 $u=\tilde{u}$.

即 u subject 解析且满足 $\iint_D |u|^2 dxdy<\infty$. $u\in H^2(D)$.

从而 $H^2(D)$ 是 Hilbert 空间. $\square$

1.6.16 (变分不等式). 设 X 为 Hilbert 空间. $a(x,y)$ 是 X 上

共轭对称双线性函数. 且 $\exists M,\delta>0$. s.t.

$$\delta\|x\|^2\leq a(x,x)\leq M\|x\|^2.$$

设 $u_0\in X$. C 为 X 一个闭凸子集.

求证: 函数 $x\mapsto a(x,x)-\mathrm{Re}(u_0,x)$. 在 C 上达最小值. 唯一.

且 $\mathrm{Re}[2a(x_0,x-x_0)-(u_0,x-x_0)]\geq 0$.

Pf: 令 $f(x)=a(x,x)-\mathrm{Re}(u_0,x)$. 并记 $d=\inf\limits_{x\in C} f(x)$.

则 $\forall n\in\mathbb{N}$. $\exists x_n$ s.t. $d\leq f(x_n)\leq d+\frac{1}{n}$.

于是我们只要证明. $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列.

$$\|x_n-x_m\|^2 \le \frac{1}{\delta} a(x_n-x_m, x_n-x_m)$$
$$= \frac{1}{\delta}\left[2a(x_n,x_n)+2a(x_m,x_m)-4a\left(\frac{x_n+x_m}{2}, \frac{x_n+x_m}{2}\right)\right].$$
$$\le \frac{1}{\delta}\cdot\left(2\left(d+\frac{1}{n}\right)+2\left(d+\frac{1}{m}\right)-4d\right) \to 0. \quad (n,m\to\infty)$$

唯一性：若有 x_0、$\tilde{x}_0 \in C$ 均满足 $f(x_0)=f(\tilde{x}_0)=d$.

则 $$\|x_0-\tilde{x}_0\|^2 \le \frac{1}{\delta} a(x_0-\tilde{x}_0, x_0-\tilde{x}_0)$$
$$= \frac{1}{\delta}\left[2a(x_0,x_0)+2a(\tilde{x}_0,\tilde{x}_0)-4a\left(\frac{x_0+\tilde{x}_0}{2}, \frac{x_0+\tilde{x}_0}{2}\right)\right].$$
$$\le \frac{1}{\delta}\cdot(4d-4d)=0.$$

从而 $x_0=\tilde{x}_0$.

任取 $x\in C$. 考虑 $\varphi_x(t)= f(x_0+t(x-x_0))$, ~~对于~~ $t\in[0,1]$.

则应有 $\forall x, t$. $\varphi_x(t)\ge\varphi_x(0)$. 从而 $\varphi_x'(0)\ge 0$.

"变分法" 所以该题目叫变分不等式.

$$\varphi_x(t)= a(x_0+t(x-x_0), x_0+t(x-x_0)) - \mathrm{Re}(u_0, x_0+t(x-x_0))$$
$$= a(x_0,x_0)+2t\,\mathrm{Re}\,a(x_0, x-x_0)+t^2 a(x-x_0,x-x_0)-\mathrm{Re}(u_0, x_0+t(x-x_0)).$$
$$0\le\varphi_x'(0)=\mathrm{Re}\left[2a(x_0,x-x_0)-(u_0,x-x_0)\right]. \qquad \square$$

1.6.12. 设 $\mathcal{X}$ 为内积空间. $\{e_n\}$ 为正交规范集.

求证：$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}(x,e_n)\overline{(y,e_n)}\right| \le \|x\|\,\|y\|.$$

Pf: $$\left|\sum_{n=1}^{\infty}(x,e_n)\overline{(y,e_n)}\right| \le \left(\sum_{n=1}^{\infty}|(x,e_n)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty}|(y,e_n)|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\le \|x\|\cdot\|y\|. \qquad \square$$