有界闭 $\overset{④}{\Longleftarrow}$ 紧 $\Longleftrightarrow$ 自列紧 $\overset{③}{\Longrightarrow}$ 列紧 $\overset{②}{\Longrightarrow}$ 完全有界 $\overset{①}{\Longrightarrow}$ 有界.

反例：①④、取 $X=l^2$ 的子集 $E=\{e_n\}$.

其中 $e_n=(0,0,\cdots,\underset{n}{1},0,\cdots)$.

①有界但不全有界.

$E\subset\overline{B(0,1)}$ .从而有界.

对 $i\neq j$. $\rho(e_i,e_j)=\sqrt{2}$、从而若取 $\varepsilon=\frac{1}{2}$,

则 E 没有有限 $\varepsilon$ 网.

④有界闭但不紧

易知有界闭

$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B(e_n,\frac{1}{2})$ 是 E 的开覆盖，但没有有限子覆盖.

② 完全有界但不列紧.

令 $A=[0,1]\cap\mathbb{Q}$ . $X=\mathbb{Q}$. 令 $d(x,y)=|x-y|$.

$\forall\varepsilon>0$. 取 $n\in\mathbb{N}$ 充分大使得 $\frac{1}{n}<\varepsilon$.

则 $\{0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\cdots\frac{n-1}{n},1\}$ 是 A 有限 $\varepsilon$ 网.

如取 $x_n=\frac{1}{4}(1+\frac{1}{n})^n$. 则 $\{x_n\}$ 没有收敛子列.

③ 列紧但不自列紧

令 $X=\mathbb{R}$. $A=[0,1]\cap\mathbb{Q}$. 令 $d(x,y)=|x-y|$.

则 A 在 X 中列紧但不自列紧.

Rmk：②③ 中 选取的集合 A 相同，但在②中认为 A 不列紧. ③中认为 A 列紧.. 因为选取的全空间(即 X)不同

1.1.1. 完备空间闭子集是完备子空间.

Pf：设 $A$ 是完备空间 $X$ 的闭子集.
任取 $A$ 中 Cauchy 列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，则它也是 $X$ 中 Cauchy 列.
从而收敛至 $X$ 中某元素. $x_0$、因 $A$ 是闭子集，
所以 $x_0 \in A$. 从而 $A$ 是完备的. ▯.

度量空间完备子空间是闭子集.

Pf：设 $A$ 是~~完备~~度量空间 $X$ 的完备子空间.
任取 $A$ 中 Cauchy 列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. 则 $x_n \to x_0$. $x_0 \in A$.
(第一周作业). $A$ 是闭集. ▯.

1.1.4. Pf：存在 $0<\alpha<1$. 使得 $\forall x,y \in X$, $\rho(Tx,Ty)<\alpha\rho(x,y)$.
则 $\forall \varepsilon>0$, 取 $\delta=\frac{\varepsilon}{\alpha}$，只要 $\rho(x,y)<\delta$. 就有 $\rho(Tx,Ty)<\varepsilon$.
从而 $T$ 是连续的. ▯.

1.1.6. Pf：考虑映射 $f(x)=\rho(x,Tx)$.
由三角不等式. $\rho(x,Tx)\le\rho(x,x_0)+\rho(x_0,Tx_0)+\rho(Tx_0,Tx)$.
从而 $|\rho(x,Tx)-\rho(x_0,Tx_0)|\le\rho(x,x_0)+\rho(Tx_0,Tx)$
$<2\rho(x,x_0)$.

类似1.1.4知 $f(x)$ 在 $M$ 上连续.
因 $M$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中有界闭集. $f(x)$ 可在 $M$ 上取到最小值.
即 $\exists x_0\in M$. 使得. $\rho(x_0,Tx_0)=f(x_0)=\min\limits_{x\in M}f(x)$

下证 $f(x_0)=0$.
否则，设. $\rho(x_0,Tx_0)=f(x_0)>0$. 则有 $\rho(Tx_0,T^2x_0)<\rho(x_0,Tx_0)$.
与 $\rho(x_0,Tx_0)$ 是最小值矛盾. 从而只能 $f(x_0)=0$.
$x_0$ 就是不动点.
唯一性：设有两个不动点.. $x$, $x'$，则.
$\rho(x,x')=\rho(Tx,Tx')<\rho(x,x')$ 矛盾. ▯.

Rmk：仅由 $\rho(Tx,Ty)<\rho(x,y)$. 未必有 $0<\alpha<1$. 使 $\rho(Tx,Ty)\le\alpha\rho(x,y)$.
考虑 $M=[0,1]$. $Tx=\sin x$. 则 $|Tx-T0|=\sin x=\cos\theta\times x$, $\theta\in[0,x]$
则当 $x\to0$ 时. $\cos\theta\to1$.

地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号
电话：0551-63602184 传真：0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

1.2.1 验证 $\rho$ 是 $S$ 上的距离：

正定性，对称性显然，只需验证三角不等式。

对此，由 $f(t)=\frac{t}{1+t}$ 在 $t\geqslant 0$ 时的单调性，有 $\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}$.

$$\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}=\frac{|a|}{1+|a|+|b|}+\frac{|b|}{1+|a|+|b|}\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}.$$

设 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)$，$y=(\eta_1,\eta_2,\cdots)$，$z=(\zeta_1,\zeta_2,\cdots)$.

则
$$\begin{aligned}\rho(x,z)&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\cdot\frac{|\xi_k-\zeta_k|}{1+|\xi_k-\zeta_k|}\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\cdot\frac{|\xi_k-\eta_k+\eta_k-\zeta_k|}{1+|\xi_k-\eta_k+\eta_k-\zeta_k|}\\&\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\cdot\frac{|\xi_k-\eta_k|}{1+|\xi_k-\eta_k|}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\cdot\frac{|\eta_k-\zeta_k|}{1+|\eta_k-\zeta_k|}=\rho(x,y)+\rho(y,z).\end{aligned}$$

验证完备性：

设 $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是 $S$ 中 Cauchy 列，其中 $x_i=(\xi_{1i},\xi_{2i},\cdots)$.

则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当 $n,m>N$ 时，有 $\rho(x_n,x_m)<\frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$

特别地，$\frac{1}{2^k}\cdot\frac{|\xi_{kn}-\xi_{km}|}{1+|\xi_{kn}-\xi_{km}|}<\frac{\varepsilon}{2^{k+1}}\Rightarrow|\xi_{kn}-\xi_{km}|<\cancel{\frac{\varepsilon}{\frac{1}{2^k}-\varepsilon}}\ \frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}$.

只要取 $\varepsilon<1$ 就有 $|\xi_{kn}-\xi_{km}|<\varepsilon$.

因此 $\forall k\in\mathbb{N}$，$\{\xi_{k,i}\}_{i=1}^{\infty}$ 是 $\mathbb{C}$ 中 Cauchy 列，由 $\mathbb{C}$ 完备性，这些序列均收敛

设对应的极限是 $\xi_k$，并令 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)$.

下证 $x$ 是 $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ 依 $\rho$ 收敛的极限。

$$\rho(x_n,x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\cdot\frac{|\xi_k-\xi_{kn}|}{1+|\xi_k-\xi_{kn}|}.$$

因 $\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\cdot\frac{|\xi_k-\xi_{kn}|}{1+|\xi_k-\xi_{kn}|}<\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2^N}$.

只要取 $N>\log_2\frac{1}{\varepsilon}$，就有 $\frac{1}{2^N}<\varepsilon$.

University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号 邮编：230026
电话：0551-63602184 传真：0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

固定N，则对每个$k\le N$，由前面构造知，$\exists N_k$，使得当$m>N_k$时，
$|\xi_{m_k}-\xi_m|<\varepsilon$。

取$\hat{N}=\max\{N_1,N_2,\cdots N_N\}$，则当$m>\hat{N}$时有

$$\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2^k}\cdot\frac{|\xi_{m_k}-\xi_m|}{1+|\xi_{m_k}-\xi_m|}<\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2^k}\cdot|\xi_{m_k}-\xi_m|$$
$$<\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2^k}\cdot\varepsilon$$
$$<\varepsilon. \quad \square$$

综上，$\rho(x_m,x)<2\varepsilon$，即$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$的确依$\rho$收敛于$x$。

从而$(S,\rho)$是完备度量空间。$\square$

1.2.4 Pf：令$P_k(x)=\sum_{n=0}^{k}\frac{x^n}{n!}$，设$m>n$。

则$\rho(P_m(x),P_n(x))=\int_0^1\sum_{k=n+1}^{m}\frac{x^k}{k!}dx=\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{(k+1)!}$
$$<\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$
$$=\frac{1}{n+2}\to 0.$$

从而$\{P_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$是Cauchy列

考虑$C[0,1]$，度量仍采用$\rho(p,q)=\int_0^1|p-q|dx$，

则$(P[0,1],\rho)\subset(C[0,1],\rho)$，且$\{P_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$在$C[0,1]$中有

极限$e^x$，但$e^x\notin P[0,1]$，从而$P[0,1]$不完备。

$P[0,1]$的完备化空间是$L^1[0,1]$。

稠密性：$L^1$函数可由连续函数依$\rho$逼近。

任取$f(x)\in C[0,1]$，由Weierstrass定理，有$g(x)\in P[0,1]$，

$\max_{0\le x\le 1}|f(x)-g(x)|<\varepsilon$。

而$\int_0^1|f(x)-g(x)|dx<1\cdot\max_{0\le x\le 1}|f(x)-g(x)|<\varepsilon$。

从而$P[0,1]$在度量$\rho$下也在$C[0,1]$中稠密，从而在

$L^1[0,1]$中稠密。$\square$

1.2.2. "$\Rightarrow$" 基本列是收敛子列

"$\Leftarrow$" 设 $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是 Cauchy 列. 且有收敛子列 $\{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$. 其极限为 $x$.

$\forall \varepsilon>0$. $\exists k$ 使得. $i>k$ 时. $\rho(x_{n_i}, x)<\varepsilon$.

同时. $\exists N$ 使得. $n, m>N$ 时. $\rho(x_n, x_m)<\varepsilon$.

于是当 $n>\max\{N, n_k\}$ 时. $\rho(x_n, x)<\rho(x_n, x_{n_m})+\rho(x_{n_m}, x)<2\varepsilon$. $(n_m>N)$.

从而 $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是收敛列. $\square$.

1.2.3. 考虑序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. 其中 $x_n=(1, \frac{1}{2}, \cdots \frac{1}{n}, 0, 0, \cdots)$.

则 $\{x_i\}$ 是 Cauchy 列. 令 $x=(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \cdots)$.

则 $\rho(x_n, x)=\frac{1}{n+1}\to 0$ $(n\to\infty)$. 但 $x\notin F$. 从而 $F$ 不完备

$F$ 的完备化空间是. $x=(\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_k \cdots)$. $\lim\limits_{k\to\infty}\xi_k=0$ 的实数列全体. 记为 $\widetilde{F}$.

完备性: 设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Cauchy 列. 其中 $x_n=(\xi_{1n}, \xi_{2n}, \cdots)$

则. $\forall k\in\mathbb{N}$. $\{\xi_{kn}\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathbb{R}$ 中 Cauchy 列, 从而有极限 $\xi_k$.

令 $x=(\xi_1, \xi_2, \cdots)$. 则 $\forall\varepsilon>0$. $\forall k\in\mathbb{N}$. $\exists N_k$. $n\geqslant N_k$ 时. 有 $|\xi_{kn}-\xi_k|<\varepsilon$

另有 $N$ 使得 $\forall n, m\geqslant N$. $\rho(x_n, x_m)<\varepsilon$.

当 $n>N$ 时. $\rho(x_n, x)=\sup\limits_{k\geqslant 1}|\xi_{kn}-\xi_k|$.

考察每一个 $k$. 若 $N_k\leqslant N$. 则 $|\xi_{kn}-\xi_k|<\varepsilon$.

若 $N_k>N$. 则 $|\xi_{kn}-\xi_k|\leqslant|\xi_{kn}-\xi_{kN_k}|+|\xi_{kN_k}-\xi_k|<2\varepsilon$.

总之有 $\rho(x_n, x)\leqslant 2\varepsilon$. 即 $x$ 是 $\{x_n\}$ 的极限.

下证 $x\in\widetilde{F}$.

固定 $\varepsilon$. 则存在某个 $N$. 满足 $\rho(x_N, x)<\varepsilon$. $\{\xi_{kN}\}_{k=1}^{\infty}$ 收敛至0. 从而 $\exists\widetilde{N}$.

使得当 $k\geqslant\widetilde{N}$ 时. $|\xi_{kN}|<\varepsilon$.

则当 $k\geqslant\widetilde{N}$ 时. $|\xi_k|\leqslant|\xi_k-\xi_{kN}|+|\xi_{kN}|<\rho(x_N, x)+|\xi_{kN}|<2\varepsilon$.

从而 $\{\xi_k\}$ 也收敛至0. 从而 $x\in\widetilde{F}$. $\square$.

1.3.1 "$\Rightarrow$" $A$ 本身可作为列紧 $\varepsilon$ 网

"$\Leftarrow$" 设 $N$ 是 $A$ 的列紧 $\varepsilon$ 网，则 $N$ 有有限 $\varepsilon$ 网，记其为 $M$.

$\forall x\in A$，$\exists\, y\in N$，$\rho(x,y)<\varepsilon$，且存在 $z\in M$，$\rho(y,z)<\varepsilon$.

于是 $\rho(x,z)\leqslant\rho(x,y)+\rho(y,z)=2\varepsilon$.

而 $M$ 是 $A$ 有限 $2\varepsilon$ 网，从而 $A$ 完全有界，因此列紧. $\square$.

1.3.2、固定 $\varepsilon>0$，则 $\forall x\in M$，$\exists\,\delta_x$，使得当 $\rho(x,x')<\delta_x$ 时，$d(f(x),f(x'))<\varepsilon$.

$M\subset\bigcup\limits_{x\in M}B(x,\delta_x)$，从而有 $M$ 中有限个元素 $x_k$，$k=1,2,\cdots,n$，$M\subset\bigcup\limits_{k=1}^{n}B(x_k,\delta_{x_k})$.

从而 $f(M)\subset\bigcup\limits_{k=1}^{n}B(f(x_k),\varepsilon)$，有界.

只需对上确界证明.

设 $\beta=\sup\limits_{x\in M}f(x)$，则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\,x_\varepsilon\in M$，$f(x_\varepsilon)>\beta-\varepsilon$，取 $\varepsilon=\frac{1}{n}$，则得到

序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，满足 $f(x_k)>\beta-\frac{1}{k}$，$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有收敛子列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$，记其极限为 $x_0$，

则 $x_0\in M$，且 $f(x_0)=\beta$. $\square$.

1.3.4、记 $d=\rho(F_1,F_2)$，并令 $f(x,y)=\rho(x,y)$，$x\in F_1$，$y\in F_2$.

~~$f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)$~~ 则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\,x_\varepsilon,y_\varepsilon$ $f(x_\varepsilon,y_\varepsilon)<d+\varepsilon$，取 $\varepsilon=\frac{1}{n}$，则得到序列

$\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$f(x_n,y_n)<d+\frac{1}{n}$.

$\{x_n\}$ 有收敛子列 $\{x_{n_k}\}$，以 $x_0\in F_1$ 为极限，$\{y_{n_k}\}$ 有收敛子列 $\{y_{n_{k_j}}\}$，以 $y_0\in F_2$

为极限，且显然 $\{x_{n_{k_j}}\}$ 也以 $x_0$ 为极限.

于是有 $x_0\in F_1$，$y_0\in F_2$，$\rho(x_0,y_0)=d$. $\square$.

Ex：证明 $\Phi$ 是等距同构

Pf：任取 $x,y\in X'$，则有 $X_0'$ 中序列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$x_n\to x$，$y_n\to y$.

同时有 $\{[\xi_n]\}$，$\{[\eta_n]\}\subset X_0$，$\varphi([\xi_n])=x_n$，$\varphi([\eta_n])=y_n$.

$[\xi_n]\to[\xi]\in\tilde{X}$，$[\eta_n]\to[\eta]\in X'$，且由定义 $\Phi([\xi])=x$，$\Phi([\eta])=y$.

$$
\begin{aligned}
d'(\Phi([\xi]),\Phi([\eta]))=d'(x,y)=\lim_{n\to\infty}d'(x_n,y_n)&=\lim_{n\to\infty}d'(\varphi([\xi_n]),\varphi([\eta_n]))\\
&=\lim_{n\to\infty}\tilde{d}([\xi_n],[\eta_n])\\
&=\tilde{d}([\xi],[\eta]).\ \square
\end{aligned}
$$