# 第七次习题课讲义

于俊骜

2024 年 10 月 30 日

## 目录

# 1 复习回顾

数学分析的第一章研究实数轴，第二章就要研究实数轴上的函数；泛函分析也类似，第一章介绍了度量空间，第二章自然就是其上的映射，即**算子**和**泛函**（取值为数的算子）。

## 1.1 线性算子

这门课只会研究线性算子，非线性算子的理论过于复杂，至今仍是前沿课题。

线性算子可以理解为无穷维的矩阵，但无法写成矩阵的形式。因此，很多线性代数的理论几乎都可以推广过来，特别是**特征值理论**，在本章的最后一节会重点研究。矩阵的范数定义为它的最大特征值，这是因为它体现了这个矩阵究竟能把一个向量“拉多长”。

对于无穷维空间上的算子，我们暂时无法用传统方式定义特征值，进而定义范数。所以，我们采用上面提到的那种方法。

**定义 1** (算子范数). *设 $T: X \to Y$ 为一个算子，则其范数定义为*

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_X=1} \|Tx\|_Y = \sup_{x\in X} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}$$

*范数有限的算子称为***有界算子**。*从 $X$ 到 $Y$ 的所有有界线性算子记为 $\mathcal{L}(X, Y)$。特别地，若 $Y$ 完备，则 $\mathcal{L}(X, Y)$ 是一个 Banach 空间。*

**注 1.** *大多数情况下，积分算子是有界算子，而微分算子是无界算子。*

对于算子的线性性使它具有很好的分析性质。

**定理 1.** *设 $T$ 是线性算子，则以下三条等价：*

1. *$T$ 有界；*
2. *$T$ 在 $X$ 上连续；*
3. *$T$ 在 0 处连续。*

有界性通常比连续性描述起来更方便，因此我们这门课接下来往往强调有界线性算子。

## 1.2 几大定理

第二章会出现大量“有名字”的定理，这里只带大家回顾一下叙述。它们的证明没那么重要，但在这门课包括其他课的后续会频繁应用。

**定理 2** (Riesz 表示定理). *对于 Hilbert 空间 $X$ 上的有界线性泛函 $f$，存在唯一 $y_f \in X$ 使得*

$$f(x) = \langle x, y_f \rangle, \ \forall x \in X$$

**定理 3** (Baire 纲定理). *完备度量空间是第二纲集。*

**定理 4** (开映射定理). *两个 Banach 空间之间的线性满射是开映射。*

**定理 5** (闭图像定理). *对于 Banach 空间 $X, Y$，若闭算子 $A : X \to Y$ 的定义域是闭集，则 $A$ 有界。*

**定理 6** (共鸣定理/一致有界定理). *设 $X$ 是 Banach 空间，$Y$ 是 $B^*$ 空间。若 $W \subset \mathcal{L}(X, Y)$，使得*

$$\sup_{A \in W} \|Ax\| < +\infty, \ \forall x \in X$$

*则存在 $M > 0$，使得*

$$\sup_{A \in W} \|A\| < M$$

**定理 7** (Banach-Steinhaus 定理). *设 $X$ 是 Banach 空间，$Y$ 是 $B^*$ 空间。若 $M$ 是 $X$ 的稠密子集，则一列算子 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}, A$ 满足*

$$\lim_{n \to \infty} A_n x = Ax, \ \forall x \in X$$

*当且仅当 $\{\|A_n\|\}_{n=1}^{\infty}$ 有界且*

$$\lim_{n \to \infty} A_n x = Ax, \ \forall x \in M$$

**定理 8** (Lax-Milgram 定理). *对于 Hilbert 空间上的共轭双线性函数 $a(x, y)$，若*

1. *$\exists M > 0$ 使得 $|a(x, y)| \le M\|x\|\|y\|$ 对任意 $x, y$ 成立，*

2. *$\exists\ de > 0$ 使得 $|a(x, x)| \ge d\|x\|^2$ 对任意 $x$ 成立，*

*则存在唯一有界线性算子 $A \in \mathcal{L}(X)$ 使得*

$$a(x, y) = (x, Ty) \qquad \|A^{-1}\| \le \frac{1}{\delta}$$

# 2 作业选讲

## 2.1 习题 2.2.3

*证明.* 由 Riesz 表示定理，存在 $g_1, g_2 \in H$ 使得

$$J_x(f) = \langle f, g_1 \rangle$$
$$J_y(f) = \langle f, g_2 \rangle$$

下证

$$K(x, y) = \langle g_2, g_1 \rangle$$

是 $H$ 的再生核。

取定 $y \in S$，则用 $g_2$ 替换 $f$ 可得

$$K(x, y) = \langle g_2, g_1 \rangle = J_x(g_2) = g_2(x) \in H$$

另一方面

$$f(y) = J_y(f) = \langle f, g_2 \rangle = \langle f, K(\cdot, y) \rangle$$

□

**注 2.** 最开始会自然地想到构造 $K(x, y) = \langle g_1, g_2 \rangle$，但尝试后发现差一个共轭，所以换一下。思路比较绕，但本质就是等量代换。

## 2.2 习题 2.2.4

*证明.* 首先

$$z, w \in D \Longrightarrow 1 - z\bar{w} > 0$$

这说明 $K(z, w)$ 的确是定义在 $D \times D$ 上的函数。接下来验证再生核的两条定义即可。

首先，对于任意给定 $w$

$$K(z, w) = \frac{1}{\pi(1 - z\bar{w})^2}$$

是 $D$ 上的解析函数，即 $K(\cdot, w) \in H^2(D)$。

进一步将 $f$ 和 $K$ 在 $z=0$ 处 Taylor 展开得到

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$
$$K(z,w) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\bar{w}^n z^n$$

于是由**习题 1.6.11(3)** 得到

$$\langle f, K(\cdot, w)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n = f(w)$$

□

**注 3.** 线性空间中的第一纲集没有内点。

## 2.3 习题 2.3.7

证明. 我们通过

$$Ax = \lim_{n\to\infty} A_n x,\ \forall\, x \in X$$

逐点定义线性算子 $A$。结合 $A_n \in \mathcal{L}(X,Y)$ 知

$$\sup_n \|A_n x\| < +\infty$$

由共鸣定理，存在 $M>0$，使得

$$\sup_n \|A_n\| \leq M$$

从而

$$\|Ax\| = \|\lim_{n\to\infty} A_n x\| \leq \lim_{n\to\infty}\|A_n x\| \leq \varliminf_{n\to\infty}\|A_n\|\|x\| \leq M\|x\|$$

即 $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ 且

$$\|A\| \leq \varliminf_{n\to\infty}\|A_n\|$$

□

**注 4.** 先想办法表示出来，再验证其性质。

## 2.4 习题 2.3.8

证明. 对于 $\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots)$，定义泛函

$$f_n(\xi)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\xi_k$$

由 Hölder 不等式可得

$$|f_n(\xi)|\le\left(\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\le\left(\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}\|\xi\|_{l^p}$$

这说明 $f_n:l^p\to\mathbb{R}$ 是有界线性泛函。由上一题结论，它们的逐点极限 $f\in(l^p)^*$。

下面，构造 $x=(x_1,x_2,\cdots)$，其中 $x_k=|\alpha_k|^{q-1}e^{-i\theta_k}$，而 $\theta_k=\arg\alpha_k$，于是

$$\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p=\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|^{(q-1)p}=\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|^q$$

且

$$f(x_1,\cdots,x_n,0,\cdots)=f_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k|\alpha_k|^{q-1}e^{-i\theta_k}=\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|^q$$

进一步结合

$$f(x_1,\cdots,x_n,0,\cdots)\le\|f\|\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}=\|f\|\left(\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|^q\right)^{\frac{1}{p}}$$

可知

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}\le\|f\|,\ \forall\, n\Longrightarrow\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}\le\|f\|<+\infty\Longrightarrow\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots)\in l^q$$

反向的不等号由 Hölder 不等式得到，从而

$$\|f\|=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

□

**注 5.** 这里 $x_k$ 的构造需要掌握,它用于证明复值函数中 $L^q=(L^p)^*$ 以及 $l^q=(l^p)^*$。

## 2.5 补充题

设 $(X,d)$ 完备，则对于一列开集 $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$，若对任意 $n$ 都有 $\overline{U_n}=X$，则

$$\overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n}=X$$

*证明.* 考虑闭集 $C_n=X\backslash U_n$，则

$$\overline{C_n}=\overline{X\backslash U_n}=X\backslash U_n^{\circ}=\overline{U_n}\backslash U_n=\partial U_n \Longrightarrow \overline{C_n}^{\circ}=\varnothing.$$

这说明 $C_n$ 是疏集，于是

$$\overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n}=\overline{\bigcap_{n=1}^{\infty}(X\backslash C_n)}=\overline{X\backslash\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right)}=X\backslash\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right)^{\circ}=X$$

□

# 3 拓展：椭圆方程的存在性理论

老师上课提到过，Riesz 表示定理和 Lax-Milgram 定理在 PDE 里有大用途，我们来看看到底怎么个事儿。

## 3.1 位势方程

**定义 2** (Sobolev 空间). *若 $\Omega$ 上的函数 $u\in L^p$ 且 $u$ 的前 $k$ 阶偏导数也是 $L^p$ 的，则称 $u$ 属于 Sobolev 空间 $W^{k,p}(\Omega)$。这是一个 Banach 空间，范数取为*

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}=\left(\sum_{|\alpha|\le k}\|\partial^{\alpha}u\|_{L^p(\Omega)}^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

*特别地，$p=2$ 时，Sobolev 空间是一个 Hilbert 空间，因此也记为 $H^k(\Omega)$。*

*进一步，若 $u|_{\partial\Omega}=0$，则记为 $u\in W_0^{k,p}(\Omega)$ 或 $u\in H_0^k$。*

有些方程的初边值给得太差，确实可以证明找不到光滑解，因此我们选择在 $W^{k,p}$ 中找解，这种未必光滑的解称为**弱解**。特别地，Hilbert 空间的良好性质使得 $H^k$ 理论更成熟。

**定义 3** (位势方程的弱解). 对于方程

$$\begin{cases} -\Delta u = f \in L^2 \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

称 $u \in H_0^1$ 是它的弱解当且仅当

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v = \int_\Omega fv, \ \forall v \in H_0^1$$

**注 6.** 这种定义与原方程是相容的，因为 $u$ 光滑时由散度定理

$$\int_\Omega fv = \int_\Omega \nabla u \nabla v = \int_\Omega (-\Delta u) v$$

结合 $v$ 的任意性知 $-\Delta u = f$。

**定理 9** (位势方程弱解的存在唯一性). 对于有界区域 $\Omega$ 上的方程

$$\begin{cases} -\Delta u = f \in L^2 \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

它的弱解 $u \in H_0^1$ 存在唯一。

*证明.* 首先注意到 $H_0^1$ 上的范数满足

$$\|u\|_{H_0^1}^2 = \int_\Omega |u|^2 + \int_\Omega |\nabla u|^2$$

由于 $u \in H_0^1$ 在边界消失，我们可以证明 **Poincaré 不等式**（证明比较繁琐，可参考张恭庆 P66 或 Evans P280）

$$\|u\|_{L^2} \leq C(n) \|\nabla u\|_{L^2}$$

常数 $C(n)$ 只依赖于维数。因此我们有范数等价关系

$$\|\nabla u\|_{L^2} \leq \|u\|_{H_0^1} \leq C \|\nabla u\|_{L^2}$$

定义线性泛函

$$\begin{aligned} T : H_0^1 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longrightarrow \int_\Omega fv \end{aligned}$$

由 Cauchy 不等式

$$|Tv| \leq \int_\Omega |fv| \leq \|f\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2}\|v\|_{H_0^1} \leq C\|f\|_{L^2}\|\nabla v\|_{L^2}$$

这说明 $T$ 是有界算子，存在唯一 $u \in H_0^1$，使得

$$Tv = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$$

即 $u$ 是方程的一个解。

假设还有解 $\tilde{u}$，则

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega \nabla \tilde{u} \cdot \nabla v \Longrightarrow \int_\Omega \nabla(u - \tilde{u}) \cdot \nabla v = 0$$

取 $v = u - \tilde{u}$ 知 $u = \tilde{u}$，此即唯一性。 □

## 3.2 散度型二阶线性椭圆方程

下面考虑一种更一般的方程。

**定义 4** (散度型椭圆方程的弱解). 对于散度型椭圆方程

$$\begin{cases} Lu = -\sum_{i,j=1}^n (a_{ij}u_i)_j + \sum_{i=1}^n b_i u_i + cu = f \in L^2 \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

它的系数矩阵 $(a_{ij})_{n\times n}$ 正定且所有特征值有正的上下界，即

$$\lambda|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\xi_i\xi_j \leq \Lambda|\xi|^2,\ \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n$$

且 $b = (b_1, \cdots, b_n)$ 和 $c$ 有界。

称 $u \in H_0^1$ 为它的弱解当且仅当

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_i v_j + \int_\Omega \sum_{i=1}^n b_i u_i v + \int_\Omega cuv = \int_\Omega fv,\ \forall\, v \in H_0^1$$

与位势方程不同，我们没法用 Lax-Milgram 直接证明 $Lu = f$ 解的存在性，但可以得到退一步的结果。

**定理 10** (散度型椭圆方程解的存在唯一性). 存在充分大的 $\mu > 0$，使得有界区域 $\Omega$ 上的散度型椭圆方程

$$\begin{cases} Lu + \mu u = f \in L^2 \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

的弱解 $u \in H_0^1$ 存在唯一。

证明. 定义双线性函数

$$B_\mu(u,v) = \int_\Omega \left( \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_i v_j + \sum_{i=1}^n b_i u_i v + cuv \right) + \mu \int_\Omega uv$$

则由 Cauchy 不等式和均值不等式可得有界性

$$\begin{aligned}
|B_\mu(u,v)| &\leq \Lambda \int_\Omega |\nabla u||\nabla v| + \|b\|_{L^\infty} \int_\Omega |\nabla u||v| + (\mu + \|c\|_{L^\infty}) \int_\Omega uv \\
&\leq \Lambda \|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2} + \|b\|_{L^\infty} \|\nabla u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} + (\mu + \|c\|_{L^\infty}) \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \\
&\leq C \left( \|u\|_{L^2} + \|\nabla u\|_{L^2} \right) \left( \|v\|_{L^2} + \|\nabla v\|_{L^2} \right) \\
&\leq C \|u\|_{H_0^1} \|v\|_{H_0^1}
\end{aligned}$$

类似地有强制性

$$\begin{aligned}
|B_\mu(u,u)| &\geq \lambda \int_\Omega |\nabla u|^2 - \|b\|_{L^\infty} \int_\Omega |\nabla u||u| - \|c\|_{L^\infty} \int_\Omega |u|^2 + \mu \int_\Omega |u|^2 \\
&\geq \lambda \int_\Omega |\nabla u|^2 - \frac{1}{2}\lambda \int_\Omega |\nabla u|^2 - \frac{1}{2\lambda} \|b\|_{L^\infty}^2 \int |u|^2 - \|c\|_{L^\infty} \int_\Omega |u|^2 + \mu \int_\Omega |u|^2 \\
&\geq \frac{\lambda}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 + \left( \mu - \|c\|_{L^\infty} - \frac{1}{2\lambda} \|b\|_{L^\infty}^2 \right) \int_\Omega |u|^2 \geq \frac{\lambda}{2} \|u\|_{H_0^1}^2
\end{aligned}$$

这里取

$$\mu \geq \|c\|_{L^\infty} + \frac{1}{2\lambda} \|b\|_{L^\infty}^2 + \frac{\lambda}{2}$$

由 Lax-Milgram 定理，存在唯一 $u$ 使得

$$B_\mu(u,v) = \int_\Omega fv, \ \forall\, v \in H_0^1$$

□

至于 $Lu = f$，还需要第三章的一些紧算子理论（我不会，长大后再学习）。