第一次习题课讲义

于俊骜

2024 年 9 月 11 日

目录

1 课程概要

引用刘聪文老师 23 秋的一句话："有的同学更喜欢分析，有的同学更喜欢代数。而到了泛函分析这门课，就是双厨狂喜了。"所以，我们分别从分析和代数的角度，看看泛函分析这个学科究竟在干什么。（是的，他们有一个孩子）

1.1 宇宙的尽头是 PDE

大家在学微分方程引论的时候就看到过这种说法：古典微积分在近现代 PDE 理论中举步维艰，必须引入泛函分析以及对应的**弱解**理论。某种意义上，就是 PDE 理论推动了泛函分析的产生和发展。

1.1.1 L^p 空间与 L^p 范数

PDE 中的很多问题，其初边值未必具有很好的微分性质，经常只是个 L^p 的函数。所以我们需要把 L^p 空间弄清楚。更一般地，我们只要把 **Banach 空间**搞清楚（这就有了椭圆方程的 Schauder 理论）。

实分析中学到，L^p 空间是个无穷维线性空间，它和有限维有着很大的区别，例如**有界列未必有收敛子列**，即使空间完备。一列东西收敛，它的极限往往具有我们想要的东西。但 L^p 函数不行，它不一定有收敛子列。如果想有极限，必须想办法得到一个列紧集，我们可以把它归结于**完全有界**，这个容易很多。

有些时候一个范数长得不合心仪，我们可以改用另一个**等价范数**。比如调和分析中的 Littlewood-Paley 定理就说明了 L^p 范数和某个神奇的平方函数的等价性。后者可以把波方程的解"按频率分开"，方便估计。

1.1.2 椭圆方程的 L^2 理论

有限维的欧氏空间推广为无穷维的 Banach 空间时，我们舍弃了欧式空间中原有的**内积**结构。注意到 $<\mathbf{v},\mathbf{v}>=|\mathbf{v}|^2$，所以我们可以从内积导出范数。这类加上内积结构的 Banach 空间称为 **Hilbert 空间**。

L^2 空间就是最典型的 Hilbert 空间之一。对于一些特殊的方程，我们可以将它写成内积的形式。只要验证 **Riezs 表示定理**或 **Lax-Milgram 定理的条件**，就可以直接的得到解的存在唯一性。

Hilbert 的另一个好处是可以往子空间上投影。一个著名的例子是在将投影算子作用于不可压缩流体的 Navier-Stokes 方程

$$u_t - \Delta u + u \cdot \nabla u + \nabla p = f$$

由电磁学中的 Helmholz 定理，任意一个映射 $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 可以正交分解为一个梯度场和一个无源场。我们将 u 投到梯度场上，压强项 ∇p 就会消失，我们就可以只研究一个 u 的方程。

1.1.3 算子

对于一个 PDE，我们可以把它写成 $Au = f$ 的形式，比如波方程中 $A = \partial_{tt} - \Delta$。这样把函数映到函数的映射叫做**算子**。此时，形式上方程的解就是 $u = A^{-1}f$。所以，研究一个方程就转化为研究它对应的算子 A。

这门课研究的基本都是**有界算子**，即**算子范数** $\|A\|$ 是有限的。直观上，A 至多 | 把一个范数为 1 的函数映成范数为 $\|A\|$ 的函数。第二章学到的开映射、闭图像、共鸣等定理都是用于刻画算子的性质的。

1.1.4 紧性与收敛性

正如我们前面所说，我们想要找到一个子列收敛很不容易。除了完全有界，我们还可以通过**紧算子**达成这个目的，它可以将有界集映成列紧集。因为无穷维空间，有界集不一定紧，所以紧算子比有界算子更强一些，也有更多更好的性质。比如 $(-\Delta)^{-1}$ 就是某个函数空间中的紧算子，因此可以用紧算子理论研究位势方程。

另一方面，不是什么时候我们都能得到紧集，但如果还想要收敛性，那么这种收敛一定会更弱一点。无穷维中，一列函数未必收敛，但和它的**对偶空间**中的元素抱团，可能反而会收敛。如果它自己收敛不了，而但凡来个大佬带带它就能收敛，这就叫**弱收敛**。当然也可以反过来，大佬对你卖弱，让你带带他，这种收敛更弱，就是群头像里的**弱 * 收敛**。

我们研究弱收敛的原因是，可以证明**自反**空间的有界列必有收敛子列。因此，对于 $1 < p < +\infty$ 的 L^p 函数，只要构造出一列有界的函数，就能找到弱收敛子列，它的极限往往就是我们想要的东西，例如方程的解。

1.2 无穷维线性代数

矩阵的本质是有限维线性算子。无穷维中不再能定义矩阵（别盯着你那打洞了），但线性算子的概念可以推广。

1.2.1 无穷维线性空间

欧氏空间中，任何一个值域为 $\mathbb{R}$ 的线性映射都可以写成行向量乘列向量的形式。到了无穷维空间，我们称它为线性**泛函**，即“函数的函数”，是一种特殊的算子。我们可以发现，一个函数空间的对偶空间，就是该函数空间上的**有界线性泛函**，这门课的名称就是来源于此。

对于一个线性子空间上定义的有界线性泛函，**Hahn-Banach 定理**可以把它延拓到整个大空间上的有界算子，同时保证算子范数不增加。

矩阵的范数是它的最大特征值，这也就是它能把一个向量伸长的最大倍数。对于线性算子，类似地，它的算子范数是它的**谱半径**。谱是特征值的推广，特征值是一种谱，谱未必是特征值。

1.2.2 最佳逼近

给定线性空间的一个元素 x 和一个线性子空间，找到它们之间距离最近的两个点，称为**最佳逼近问题**。欧氏空间中，很直观地可以看出“连线垂直”时逼近效果最好。这个结论在无穷维也成立，对于 Hilbert 空间，我们只要通过做内积，让它为 0，得到的就是最佳逼近元（虽然看起来没有限维那么直观）。

1.2.3 谱理论

对于矩阵 A，要么 $(\lambda I - A)$ 可逆且逆矩阵是非奇异的，要么 $(\lambda I - A)$ 不可逆。而无穷维中情况更复杂。对于算子 A，即使 $(\lambda I - A)$ 可逆，它的逆算子也未必能“原模原样地映回来”。根据 $(\lambda I - A)$ 的可逆性以及可逆时逆的特点，我们将 λ 分为**正则值**、**点谱**（特征值）、**连续谱**、**剩余谱**。

算子理论中的一个很重要的分支就是**谱理论**。例如 **Riesz-Schauder** 理论研究的就是关于紧算子的谱。

2 作业选讲

2.1 第 2 题

证明以下三条命题等价：

- A 是闭集；
- $\bar{A}=A$；
- 若 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset A$ 收敛于 x_0，则 $x_0\in A$。

证明. ① $\Longrightarrow$ ② :

由 A 闭知 A^c 开，于是 $\forall x\in A^c$，$\exists\varepsilon>0$，使得 $B_\varepsilon(x)\subset A^c$。这说明

$$A^c\cap\bar{A}=\varnothing\Longrightarrow\bar{A}\subset A\Longrightarrow\bar{A}=A$$

② $\Longrightarrow$ ③ :

由 $x_n\to x_0$ 知，$\forall\varepsilon>0$，$\exists x_n\in B_\varepsilon(x_0)$，这说明

$$B_\varepsilon(x_0)\cap A\neq\varnothing\Longrightarrow x_0\in\bar{A}=A$$

③ $\Longrightarrow$ ① :

假设 A 不闭，则 A^c 不开，即 $\exists x_0\in A^c$，使得

$$B_\varepsilon(x_0)\cap A=\varnothing,\ \forall\varepsilon>0$$

我们取

$$x_n\in B_{\frac{1}{n}}(x_0)\cap A$$

则 $x_n\to x_0$，但 $x_0\notin A$，矛盾！ □

2.2 第 3 题

证明 $C[0,1]$ 可分。

证明. 由 Weierstrass 逼近定理，$[0,1]$ 上的实系数多项式在 $C[0,1]$ 上稠密。另一方面，取定

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k\in\mathbb{R}[x]$$

而 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\{b_k\}_{k=0}^{n}$，使得 $|a_k-b_k|<\frac{1}{n+1}$。于是对于

$$g(x)=\sum_{k=0}^{n}b_kx^k\in\mathbb{Q}[x]$$

我们有

$$\sup_{x\in[0,1]}|f(x)-g(x)|=\sup_{x\in[0,1]}\left|\sum_{i=0}^{n}(a_k-b_k)x^k\right|\leq\sum_{i=0}^{n}|a_k-b_k|<\varepsilon$$

因此，$[0,1]$ 上的有理系数多项式在 $C[0,1]$ 稠密。

最后只要证明 $\mathbb{Q}[x]$ 可数。记 A_n 为 n 次有理系数多项式，则

$$card(\mathbb{Q})=\aleph_0\Longrightarrow card(A_n)=\aleph_0^{n+1}=\aleph_0$$

因此

$$\mathbb{Q}[x]=\bigcup_{n=0}^{\infty}A_n$$

是可数集。 □

2.3 第 6 题

证明离散度量空间完备。

证明. 对任取离散度量空间的一个 Cauchy 列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，则对于 $\varepsilon=\frac{1}{2}>0$，$\exists N>0$，使得 $n>N$ 时

$$d(x_n,x_{n+p})<\varepsilon\Longrightarrow d(x_n,d_{n+p})=0\Longrightarrow x_n=x_{n+p},\ \forall p>0$$

这说明 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 以 x_{N+1} 为极限。 □

3 拓展：Banach 不动点定理的一个应用

Banach 不动点定理在课程的开头，看起来是最不重要的一个定理。他们都看不起你，但偏偏你最争气。即使到了现在的 PDE 研究中，很多解的存在/唯一性都是通过该定理得出。当初边值够小时，我们通常就能构造出一个"压缩"的映射。

对于**调和映射的热流方程**

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = A(u)(\nabla u, \nabla u) \\ u|_{t=0} = u_0 \end{cases}$$

它形式上像一个热方程，所以先考虑同一初值的热方程的解 $\tilde{u} = K * u_0$，剩余的部分 $v = u - \tilde{u}$ 就是由非齐次项导致的。

定义 Banach 空间

$$X = \left\{ v : \mathbb{R}^n \times [0, +\infty) \to \mathbb{R}^L : \|v\|_X < +\infty \right\}$$

这里范数为

$$\|v\|_X = \|v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n \times [0,+\infty))} + \sup_{t \geq 0} t^{\frac{1}{4}} \|\nabla v\|_{L^{2n}(\mathbb{R}^n) < +\infty}$$

定义算子

$$\mathcal{S}v = \int_0^t K * A(u)(\nabla u, \nabla u)$$

通过热核的衰减估计和一系列 L^p 不等式，我们可以证明当 $\|\nabla u_0\|$ 充分小时，$\mathcal{S}$ 在一个充分小的球 $B_\delta(0)$ 上是压缩映射，所以存在不动点。此时存在 v 使得

$$v = \int_0^t K * A(\tilde{u} + v)(\nabla \tilde{u} + \nabla v, \nabla \tilde{u} + \nabla v)$$

不难验证 v 是方程

$$\begin{cases} v_t - \Delta v = A(u)(\nabla v, \nabla u) \\ v|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

的一个解，从而得到了小初值情况下解的存在性。

这里我们也能看出，Banach 不动点的一个弊端是必须要求压缩映射。所以有时候初边值很大时，该方法就失效了，这也是一些方程目前只有小初值解存在性结论的原因。