光学B提纲

于俊骜

2023 年 6 月 25 日

摘要

2023春　　授课老师：唐建顺　　上课时间：1-8周1(3,4,5),4(6,7)

1　几何光学

1.1　费马原理

几何光学三定律

1. 光路可逆
2. 光沿直线传播
3. 光的反射和折射定律

反射定律

$$i_1' = i_1$$

折射定律

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$

棱镜的折射规律　δ称为偏向角

$$\begin{aligned}
\delta &= i_1 - i_2 + i_1' - i_2' \\
\alpha &= i_2 + i_2' \\
\delta &= i_1 + i_2' - \alpha
\end{aligned}$$

最小偏向角

$$
\begin{aligned}
i_2 &= i_2' = \alpha \\
i_1 &= i_1' = \frac{\alpha + \delta_{min}}{2} \\
\delta &= i_1 + i_2' - \alpha \\
n &= \frac{\sin \frac{\alpha + \delta_{min}}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}
\end{aligned}
$$

光楔的偏向角　即顶角α很小的棱镜

$$\delta = (n-1)\alpha$$

全反射临界角

$$i_c = \arcsin \frac{n_I}{n_I}$$

阶跃型光纤　$n_0 \sin i_0$称为光纤的数值孔径

$$i_0 = \arcsin \frac{\sqrt{n_g^2 - n_c^2}}{n_0}$$

光程　l是光程，n是折射率，s是光的几何路径长度

$$l = ns$$

费马原理

$$t = \frac{s}{v} = \frac{s}{\frac{c}{n}} = \frac{l}{c}$$

突变型介质的费马原理

$$t = \sum_{i=1}^{n} \frac{s_i}{v_i} = \frac{1}{c} \sum_{i=1}^{n} n_i s_i$$

渐变型介质的费马原理

$$t = \frac{1}{c} \int_A^B n \ \mathrm{d}s$$

1.2 球透镜和球面镜成像

物像关系 相对于光学系统而言

	物	像
光线会聚点	实物	实像
光线发散点	虚物	虚像

齐明点 球透镜非不具有近轴条件时，唯一可以大角度成像的点。

以球心C为参考点，物距s_0，像距s_0'，球内外折射率n', n，半径r。

$$\begin{cases} s_0 = -\dfrac{n'}{n}r \\ s_0' = \dfrac{n}{n'}r \end{cases}$$

单球面近轴折射公式

$$\frac{n'}{s'} + \frac{n}{s} = \frac{n' - n}{r}$$

光焦度 可正可负

$$P = \frac{n' - n}{r}$$

物方焦距 即$s' = -\infty$

$$f = \frac{n}{n - n'}r = \frac{n}{P}$$

像方焦距 即$s = \infty$

$$f\text{ß} = \frac{n\text{¸}}{n - n'}r = \frac{n\text{¸}}{P}$$

高斯公式 该公式对球面镜反射仍成立

$$\frac{f}{s} + \frac{f'}{s'} = 1$$

牛顿公式 x是物与物方焦点的距离，xß是像与像方焦点的距离

$$xx' = ff'$$

垂轴放大率

$$V = \frac{y'}{y} = -\frac{ns'}{n's}$$

角放大率

$$\gamma = \frac{-u'}{u} = -\frac{s}{s'}$$

拉格朗日-亥姆霍兹定理

$$nuy = n'u'y' = n''u''y'' = \cdots$$

亥姆霍兹公式 折射球面能使空间所有点以任意宽光束成像的必要条件

$$yn\tan u = y'n'\tan u'$$

阿贝公式 近轴小物以大孔径光束成像的充要条件

$$yn\sin u = y'n'\sin u'$$

球面镜的反射定律

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = -\frac{2}{r}$$

1.3 薄透镜成像

光焦度 物空间、像空间、透镜折射率分别是n, n', n_L，两球面半径为r, r'

$$\begin{aligned} P &= \frac{n_L - n}{r} = \frac{n}{s} + \frac{n_L}{s_L} \\ P' &= \frac{n' - n_L}{r'} = \frac{n'}{s'} + \frac{n_L}{-s_L} \\ P_L &= \frac{n_L - n}{r} + \frac{n' - n_L}{r'} = \frac{n'}{s'} + \frac{n}{s} \end{aligned}$$

焦距

$$\begin{aligned} f &= \frac{n}{\frac{n_L - n}{r} + \frac{n' - n_L}{r'}} \\ f' &= \frac{n'}{\frac{n_L - n}{r} + \frac{n' - n_L}{r'}} \end{aligned}$$

磨镜者公式

$$f' = f = \frac{1}{(n_L - 1)(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2})}$$

牛顿公式 设$x=s-f,x'=s'-f'$，则

$$xx'=ff'$$

垂轴放大率

$$V=V_1V_2=-\frac{ns'}{n's}=-\frac{fs'}{f's}=-\frac{f}{x}=\frac{x'}{f'}$$

光学作图的特殊光线

1. 物方入射光线平行于光轴$\Longleftrightarrow$像方光线经过像方焦点
2. 入射光线经过物方焦点$\Longleftrightarrow$像方光线平行于光轴
3. 入射光线经过光心$\Longleftrightarrow$像方光线经过光心并与入射光线平行

理想光具组 出射光线在像方主平面上的投射高度与入射光线在物方主平面上的投射高度相等。

1.4 光线变换矩阵

光线的描述 光线可用列向量$\begin{pmatrix}x\\ \lambda\end{pmatrix}$表示。其中$x$表示某点光线与光轴的距离，$\lambda$表示该点光线与光轴的夹角。于是光线的变换可以用矩阵描述：

$$\begin{pmatrix}x_2\\ \lambda_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ \lambda_1\end{pmatrix}$$

常见的光线变换矩阵

1. 直线传播（d为传播距离在光轴的投影）：$\begin{pmatrix}1 & d\\ 0 & 1\end{pmatrix}$
2. 过焦距为f的薄透镜：$\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\frac{1}{f} & 1\end{pmatrix}$
3. 平介质界面（折射率由n_1变为n_2）：$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{n_1}{n_2}\end{pmatrix}$
4. 球介质界面（折射率由n_1变为n_2）：$\begin{pmatrix}1 & 0\\ \frac{n_2-n_1}{n_2}\frac{1}{R} & \frac{n_1}{n_2}\end{pmatrix}$

5. 球面反射镜：$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{pmatrix}$

光线变换矩阵的行列式

$$\det A = \frac{n_1}{n_2}$$

2 光的叠加

2.1 简谐振动

一维波动方程 称

$$\frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2} - \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial t^2} = 0$$

为一维波动方程，它的解形如

$$u(z,t) = f(Vt - z) + g(Vt + z)$$

其中前一项为右行波，后一项为左行波，v为波速。

简谐振动的基本表达式 设振幅A，周期T，频率ν，角频率（圆频率）ω，相位$\omega t + \varphi$，初相φ，则表达式为

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

其中$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$。

波函数 沿着z轴传播的一维简谐波满足

$$U(z,t) = A\cos(\omega t - kz + \varphi_0)$$

其中$k = \frac{2\pi}{\lambda}$为波矢（空间角频率），$\lambda = VT$为波长。时间周期为T，空间周期为λ，分别取倒数得到时间频率和空间频率。

沿着任意方向传播的简谐波满足

$$U(z,t) = A\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi_0)$$

其中$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{\kappa}$与波的传播方向相同。

相速度　等相位面的传播速度：

$$V_p = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\omega}{k}$$

群速度　等幅面（包络）的传播速度：

$$V_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

平面波的等相位面　任意时刻平面波的等项为面的是$kr = \mathrm{Const}$的面。

夹角形式　设$\vec{k}$与坐标轴的夹角分别是α, β, γ，则波函数化为

$$U(\vec{r}, t) = A\cos(2\pi(\frac{\cos\alpha}{\lambda}x + \frac{\cos\beta}{\lambda}y + \frac{\cos\gamma}{\lambda}z - \frac{t}{T}))$$

其中$d_x = \frac{\lambda}{\cos\alpha}, d_y = \frac{\lambda}{\cos\beta}, d_z = \frac{\lambda}{\cos\gamma}$成为空间周期，对应倒数为空间频率。以上物理量满足

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$
$$f = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2} = \frac{1}{\lambda}$$
$$k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

球面波函数　点波源产生球面波满足

$$U(r, t) = \frac{A}{r}\cos(\omega t \pm kr)$$

其中振幅$\frac{A}{r}$满足能量守恒，相位分布形式为

$$\varphi(p) = \omega t \pm kr$$

其中$\varphi(p) = \mathrm{Const}$是波源为中心的一个球面。

复振幅　为了方便计算，给振幅加上虚部：

$$U(z, t) = Ae^{-i(\omega t - kr)}$$

此时时间变量和空间变量可以分离：

$$\tilde{U}(z) = Ae^{ikz}$$
$$\tilde{U}(p) = A(p)e^{i\varphi(p)}$$

常见复振幅 平面波：

$$\tilde{U}(x,y,z) = Ae^{ikz}$$
$$\tilde{U}(P) = A\exp(i\vec{k}\cdot\vec{r})$$

会聚球面波：

$$\tilde{U}(P) = \frac{A}{r}e^{ikr}$$
$$\tilde{U}(x,y,z) = \frac{A}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}\exp(ik|\vec{r}-\vec{r}_0|)$$

发散球面波：

$$\tilde{U}(P) = \frac{A}{r}e^{-ikr}$$
$$\tilde{U}(x,y,z) = \frac{A}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}\exp(-ik|\vec{r}-\vec{r}_0|)$$

复振幅在波前的传播 设单色波波在xz平面传播，它满足

$$\tilde{U}(x,y,z) = Ae^{ik(x\sin\theta+z\cos\theta)}$$

波前$z=0$上有

$$\tilde{U}(x,y) = Ae^{ik(x\sin\theta)}$$

2.2 干涉初步

光强

$$I =< S >=< |\vec{E}\times\vec{H}| >= \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} < E^2 >$$

相对光强

$$I = 2 < S >$$

单色平面波的相对光强

$$I = \frac{2}{T}\int_0^T E_0^2(p)\cos^2(\omega t-\varphi(p))\ \mathrm{d}t = E_0^2(p)$$

相对光强的复振幅表示 星号表示复数共轭。

$$I = \tilde{E}(p)\tilde{E}^*(p)$$

干涉光强公式

$$
\begin{aligned}
I(p) &= I_1(p) + I_2(p) + 2\vec{E}_{10}(p) \cdot \vec{E}_{20}(p) \cos\Delta\varphi(p) \\
&= I_1(p) + I_2(p) + 2\sqrt{I_1(p)I_2(p)} \cos\theta \cos\Delta\varphi(p)
\end{aligned}
$$

光的稳定干涉条件

1. 频率相同
2. $\vec{E}_{10}(p) \cdot \vec{E}_{20}(p) \neq 0$
3. 对给定点P，有稳定的相位差

此时$\Delta\varphi$只是空间位置的函数。

可观测到的不稳定干涉　若时间τ内

$$< \cos\Delta\varphi(p,t) > \neq 0$$

则可观察到干涉现象。

干涉条纹反衬度

$$\gamma = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{2E_{10}E_{20}}{E_{10}^2 + E_{20}^2}$$

用反衬度表示光强　令$2I_0 = I_1 + I_2 = E_{10}^2 + E_{20}^2$，则

$$I = 2I_0(1 + \gamma\cos\Delta\varphi)$$

特别地，若$2E_{10} = E_{20} = A$，有

$$I(p) = 2A^2(1 + \cos\Delta\varphi) = 4A^2 \cos\frac{\Delta\varphi}{2}$$

2.3 光的偏振

偏振光的分解

$$
\begin{aligned}
\vec{E}(z,t) &= \vec{E}_x(z,t) + \vec{E}_y(z,t) \\
&= \vec{E}_{x0}(t)(\omega t - kz - \varphi_x(t)) + \vec{E}_{y0}(t)(\omega t - kz - \varphi_y(t))
\end{aligned}
$$

偏振度

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$$

振动方向　可用于判断偏振光类型

$$\tan\theta = \frac{E_{y0}\cos(\omega t - kz - \Delta\varphi)}{E_{x0}\cos(\omega t - kz)}$$

对于一般的$\Delta\varphi$，可以选取$t = 0$和$t = \frac{T}{4}$判断旋转方向。

光矢量随时间变化　设$\vec{E}_x$的初相位为0，$\vec{E}_y$的初相位为$-\Delta\varphi$，直接取$z = 0$点判断即可：

$$\tan\theta = \frac{E_{y0}\cos(\omega t - \Delta\varphi)}{E_{x0}\cos(\omega t)}$$

展开整理得：

$$\frac{E_x^2}{E_{x0}^2} + \frac{E_y^2}{E_{y0}^2} - 2\frac{E_x}{E_{x0}}\frac{E_y}{E_{y0}}\cos\Delta\varphi = \sin^2\Delta\varphi$$

性质主要取决于$\Delta\varphi$。

光矢量随空间变化　直接取$t = 0$点判断即可：

$$\tan\theta = \frac{E_{y0}\cos(-kz - \Delta\varphi)}{E_{x0}\cos(-kz)}$$

一些偏振光经过偏振片的光强变化

- 自然光：$I = \frac{1}{2}I_0$
- 线偏振光：$I = I_0\cos^2\alpha$
- 圆偏振光：$I = \frac{1}{2}I_0$

椭圆偏振光　设$E_{xop} = E_{xo}e^{i\varphi_x}\cos\alpha$，$E_{xop} = E_{xo}e^{i\varphi_x}\cos\alpha$，则

$$I = I_x\cos^2\alpha + I_y\sin^2\alpha + 2\sqrt{I_xI_y}\cos\alpha\sin\alpha\cos\Delta\varphi$$

部分偏振光　相较椭圆偏振光，部分偏振光的两分量不发生干涉

$$\begin{aligned} I &= I_{max} + (I_{max} - I_{min})\sin^2\alpha \\ &= I_n + I_l\sin^2\alpha \end{aligned}$$

3 光的干涉

3.1 杨氏双缝干涉

光程差 傍轴条件下，d为双缝间距，D为双缝与光屏间距，x为干涉点坐标

$$\Delta L = \frac{xd}{D}$$

明暗条纹 设光屏上P点与双缝间距离分别是r_1和r_2

$$\text{明：} r_2 - r_1 = \pm m\lambda$$

$$\text{暗：} r_2 - r_1 = \pm(2m+1)\frac{\lambda}{2}$$

其中对于亮条纹，m称为它的级次。

光强分布

$$I = 4I_0 \cos 2(\frac{\pi d}{D\lambda}x)$$

条纹位移与光强位移的关系

$$\delta x = -\frac{D}{R}\delta s$$

$$\Delta L = d\frac{\delta s}{R} + d\frac{\delta x}{D}$$

复色光 最高可分辨级次

$$m_{max} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$$

相应光程差

$$\Delta l_m = m_{max}\lambda = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$$

3.2 薄膜干涉

3.2.1 等倾干涉

半波损失 有半波损失：

$$n_1 < n < n_2 \qquad n_1 > n > n_2$$

无半波损失：

$$n_1 < n > n_2 \qquad n_1 > n < n_2$$

光程差 设i_2为第一次折射的折射角：

$$\Delta L = 2nh\cos i_2 + \frac{\lambda}{2}$$

若无半波损失，则去掉最后一项$\frac{\lambda}{2}$（一般是有的）。

明暗条纹 设点光源的入射角为i：

$$2h\sqrt{n^2 - n_1^2 \sin^2 i} + \frac{\lambda}{2} = \begin{cases} m\lambda, m = 1, 2, 3, \cdots, \max\text{（明）} \\ (2m+1)\dfrac{\lambda}{2}, m = 0, 1, 2, \cdots, \min\text{（暗）} \end{cases}$$

其中的max和min表明条纹数量有限。另外，透射光也有干涉现象，不同的是透射光无半波损失。若光垂直入射，则要么全亮，要么全暗。

条纹间距 设凸透镜焦距f，第N个条纹的半径和对应角分别为r_N和i_N，观察范围较小时：

$$i_N = \frac{1}{n_1}\sqrt{\frac{nN\lambda}{h}} \tag{1}$$

$$r_N = \frac{f}{n_1}\sqrt{\frac{nN\lambda}{h}} \tag{2}$$

$$\Delta i_N = \frac{n\lambda}{2n_1^2 h i_N} \tag{3}$$

$$\Delta r_N = \frac{fn\lambda}{2n_1^2 h i_N} \tag{4}$$

动态反应 两表面高度差增大时，条纹自内向外冒出。通过冒出的条纹数N可测微小量：

$$h = N\frac{\lambda}{2n}$$

复色光干涉 长波长在内，短波长在外。

3.2.2 等厚干涉

明暗条纹 只考虑平行光的垂直入射，默认有半波损失。

$$2nh + \frac{\lambda}{2} = \begin{cases} m\lambda, m = 1, 2, 3, \cdots\text{（明）} \\ (2m+1)\dfrac{\lambda}{2}, m = 0, 1, 2, \cdots\text{（暗）} \end{cases}$$

明暗纹处的劈尖厚度

$$h=\begin{cases}h=(2m-1)\lambda 4n, m=1,2,3,\cdots\text{（明）}\\ \dfrac{m\lambda}{2n}, m=0,1,2,\cdots\text{（暗）}\end{cases}$$

特别地，尖角处必为暗纹。

相邻明纹或相邻明纹　薄膜厚度差和间距分别为

$$\Delta h=\frac{\lambda}{2n}\qquad \Delta l=\frac{\lambda}{2n\theta}$$

动态反应　整体平行提升时，条纹向尖角移动。

牛顿环的几何关系

$$h=\frac{r^2}{2R}$$

牛顿环干涉条纹特征　只考虑平行光垂直入射，默认有半波损失。则中心是暗斑，条纹半径满足

$$r=\begin{cases}\sqrt{(m-\dfrac{1}{2}R\lambda)}, m=1,2,3,\cdots\text{（明）}\\ \sqrt{mR\lambda}, m=0,1,2,\cdots\text{（暗）}\end{cases}$$

条纹间距　条纹是内疏外密的：

$$\Delta r_m=r_{m+1}-r_m=\frac{\sqrt{R\lambda}}{\sqrt{m}+\sqrt{m+1}}$$

动态反应　整体平行提升时，各圆环向中心缩入。

劈尖干涉测不平整度　设待测原件在上，待测面朝下。某点条纹偏移了a，干涉条纹间距b，则表面的凹凸高度为

$$\Delta h=\frac{a}{b}\frac{\lambda}{2}$$

具体而言，向尖角便宜则为凸起，反之为凹陷。

牛顿环原理检验球透镜曲率　将待测透镜置于标准验规上，观察到的每一圈条纹对应了$\frac{\lambda}{2}$的球面误差。挤压可以进一步判断曲率是偏大还是偏小。

3.3　迈克尔逊干涉仪

干涉条纹的特征

1. 条纹内疏外密，级次内高外低（条纹数有限）
2. 镜面间距h每减少$\frac{\lambda}{2}$，中心内陷一个条纹，条纹向中心收缩，条纹变稀疏；h每增加$\frac{\lambda}{2}$，中心外冒一个条纹，条纹向外扩张，条纹变稠密
3. $h=0$，即两镜面重合时为一片漆黑（不镀膜时有半波损失，镀膜时一般没有半波损失）。

测量精度　若冒出或缩入N个条纹，则移动的距离为

$$D = N\frac{\lambda}{2}$$

最小能数出的条纹数N（可以不是整数）对应的D称为测量精度。

非平行镜面　若两镜面不交，则干涉图样弯曲，凸向尖角一边。

补偿机制　补偿板可以消除两路光线因为折射次数不同而导致的光程差。若为单色光，则可以不需要补偿板，改为移动反射镜位置，达到同样效果。

激光比长仪　通过公式

$$\Delta h = m\frac{\lambda}{2}$$

可算出待测物体的长度。其中m是从物体始端到末端，仪器记录的条纹数。

3.4　多光束干涉

3.4.1　高反射率等倾干涉

精细度系数　设振幅反射率为r，光强反射率为$R=r^2$，则定义精细度系数

$$F = \frac{4R}{(1-R)^2}$$

光强　设入射角为i_0，折射角为i，材料厚度为h，折射率为n，可定义

$$\Delta\varphi = \frac{4\pi}{\lambda} nh\cos i$$

则**透射光强**为

$$I_t = \frac{I_0}{1 + F\sin^2(\frac{\Delta\varphi}{2})}$$

根据$I_0 = I_T + I_R$，**反射光强**为

$$I_R = \frac{I_0}{1 + \frac{1}{F\sin^2(\frac{\Delta\varphi}{2})}}$$

条纹特征　投射条纹和反射条纹有如下性质：

1. 条纹均为一组同心圆，且反射条纹和投射条纹互补
2. R增大时，反射条纹亮线变宽，透射条纹亮线变窄；$R \to 1$时，反射条纹是亮背景中的暗纹，透射条纹是暗背景中的亮纹
3. 光强等于极大值一半时曲线上相应两点相位差间隔为

$$\delta = \frac{4}{\sqrt{F}} = \frac{2(1-R)}{\sqrt{R}}$$

半值角宽度

$$\Delta i_m = \frac{\lambda}{2\pi nh\sin i_m}\frac{1-R}{\sqrt{R}}$$

其中半值角宽度越小，亮环条纹越细锐。干涉场中越向外，亮纹越细锐。

3.4.2　F-P干涉仪

角色散本领　对

$$\Delta L = 2nh\cos i = m\lambda$$

微分得到角色散本领

$$D_i = \frac{\delta i}{\delta\lambda} = \frac{m}{2nh\sin i}$$

色分辨本领

$$RP = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = m\frac{\pi\sqrt{R}}{1-R}$$

RP越大，色分辨能力越强。

4 光的衍射

4.1 菲涅耳单缝衍射

菲涅耳衍射积分

$$\tilde{E}(p) = K \iint_{\Sigma} \tilde{E}(Q) F(\theta_0, \theta) \frac{e^{ikr}}{r} \ \mathrm{d}\Sigma$$

菲涅耳-基尔霍夫衍射公式

$$\tilde{E}(p) = \frac{-i}{\lambda} \iint_{\Sigma_0} \tilde{E}(Q) \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\cos\theta_0 + \cos\theta}{2} \ \mathrm{d}\Sigma_0$$

其中

$$K = \frac{-i}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{i\pi}{2}}$$

傍轴条件下，$\theta = \theta_0 = 0$，$r = r_0$，公式简化为

$$\tilde{E}(p) = \frac{-i}{\lambda r_0} \iint_{\Sigma_0} \tilde{E}(Q) e^{ikr} \ \mathrm{d}\Sigma_0$$

菲涅耳衍射 是近场衍射，L和D至少有一个是有限值。

夫琅和费衍射 是远场衍射，L和D均无限大，可用凸透镜实现。它是菲涅尔衍射的一个特例。

巴俾涅原理 一对互补屏各自在衍射场中某点所产生的复振幅之和等于自由传播时该点的复振幅。即

$$\tilde{E}_a(p) + \tilde{E}_b(p) = \tilde{E}_0(p)$$

4.2 菲涅耳圆孔与圆屏衍射

4.2.1 半波带法

定义 以光源为球心半径为R的球与圆孔相切，波前与轴上场点P的最短距离为b，则以P为球心，$b + \frac{m\lambda}{2}$为半径作球，将波前划分为一系列半波带。

单个半波带的复振幅

$$A_n \propto f(\theta_n)\frac{\Delta\Sigma_n}{r_n}$$

其中Σ_n是单个半波带的面积，而r_n是第n个半波带到P的距离，满足

$$\frac{\Delta\Sigma_n}{r_n} = \frac{\pi R\lambda}{R+b}$$

合振幅

$$A(p) = \frac{1}{2}(A_1 + (-1)^{n+1}A_n)$$

圆孔衍射的性质 圆孔中包含奇数个半波带时，中心为亮点；包含偶数个半波带时，中心为暗点。

圆屏衍射的性质

$$A(p) = A_{k+1}(p) - A_{k+2}(p) + \cdots + (-1)^{n+1}A_n(p) = A_{k+1}(p)$$

从而中心恒为亮点。

自由传播情形

$$f(\theta_n) \to 0 \Longrightarrow A_n \to 0 \Longrightarrow A(p) = \frac{1}{2}A_1(p)$$

半波带数目

$$n = (\frac{1}{R} + \frac{1}{b})\frac{\rho^2}{\lambda} \tag{5}$$

其中ρ为圆孔半径。若可以傍轴近似，则另有

$$n = (\frac{1}{d_s} + \frac{1}{d_p})\frac{\rho^2}{\lambda} \tag{6}$$

其中d_s和d_p分别为圆孔与光源、场点的距离。

4.2.2 矢量图解法

考虑自由传播时的倾斜因子，它是一条逆时针渐进于原点的螺旋线，可以直接连接初始点和圆孔半径对应的θ，该矢量的长度对应了轴上的振幅和光强。

4.2.3 菲涅耳波带片

作用 只允许第奇或偶个半波带通过，可以在适当位置形成很强的亮点。

焦距 波带片半径为

$$\rho_n = \sqrt{\frac{Rb}{R+b}n\lambda}$$

此时可以定义焦距

$$f = \frac{\rho_n^2}{n\lambda}$$

则有焦距公式

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{b}\frac{1}{f}$$

制作 波带片的制作需要以下步骤：

1. 确定工作波长λ和所需主焦距f
2. 算出相应的半径，将各环带相间涂黑

特别地，若将第$2n_1$和第$2n$个半波带视为同一个，同时涂黑或不涂黑，则场点的波干涉相消，得到暗点。

多焦点 若f为波带片的主焦距，则$\frac{f}{2n+1}$也是焦距，称为次焦距。

4.3 单缝夫琅和费衍射

单缝衍射因子 P点的振幅满足

$$E_p = E_0\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

其中

$$\alpha = \frac{\Delta\varphi}{2} = \frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}$$

而θ为缝后透镜光心到P的连线与光轴夹角。从而有光强公式

$$I_p = I_0(\frac{\sin\alpha}{\alpha})^2$$

单缝衍射因子即定义为

$$(\frac{\sin\alpha}{\alpha})^2$$

主极大 又称零级衍射斑，定义为中央明纹位置，即$\theta = \alpha = 0$处。该点光强远大于其他位置。

极小 暗斑位置，即$\alpha = \pm m\pi$处。

次极大 又称高级衍射斑，即$\tan\alpha = \alpha$处。数值近似为

$$\alpha = \pm 1.43\pi, \pm 2.46\pi, \pm 3.47\pi, \cdots$$

设中央主极大光强为1，则次极大的光强为

$$I = 0.0472I_0, 0.0165I_0, 0.0083I_0, \cdots$$

动态反应

- 光源上下移动时，衍射图样反向平移
- 单缝上下移动时，衍射图样不变，仅亮度变化

条纹宽度 对于夫琅和费单缝衍射

	主极大	次极大
角宽度	$\Delta\theta_0 = \frac{2\lambda}{a}$	$\Delta\theta = \frac{\lambda}{a}$
线宽度	$\Delta x_0 = \frac{2f\lambda}{a}$	$\Delta x = \frac{1}{2}\Delta x_0$

另有半角宽度，定义为角宽度的一半。

缝宽变化对条纹的影响 缝宽a增加时，条纹角宽度单调递减趋于0，衍射效应逐渐可忽略。

4.4 圆孔夫琅和费衍射

圆孔衍射因子 光强满足

$$I_p = I_0(\frac{2J_1(u)}{u})^2,\ u = \frac{2\pi}{\lambda}a\sin\theta$$

圆孔衍射因子即定义为

$$(\frac{2J_1(u)}{u})^2$$

其中$J_1(u)$为一阶Bessel函数。

图样性质 圆孔夫琅和费衍射的光强分布具有如下性质

- 光强分布有圆对称性
- 主极大是圆斑，称为爱里斑
- 从爱里斑向外，衍射图样形成一组明暗交替的同心圆环，随半径的增大各明环的亮度急剧下降
- 爱里斑的角半径（第一暗环对应的角半径）为

  $$\Delta\theta = 0.61\frac{\lambda}{a} = 1.22\frac{\lambda}{D}$$

  线半径为

  $$r = 0.61\frac{\lambda f}{a} = 1.22\frac{\lambda f}{D}$$

以上性质说明为提高分辨率，需要增大镜头。

瑞利判据 如果一个物点所产生的衍射图样的主极大中心恰与另一物点的衍射图样的第一零点位置重合，也就是说两谱线中心的角距离等于每一谱线的半值角宽度，则这两个像斑或物点是刚好可以分辨的。

透镜的分辨率 根据瑞利判据可得

	物方	像方
最小分辨角	$\delta\theta = 1.22\frac{\lambda}{nD}$	$\delta\theta' = 1.22\frac{\lambda}{n'D}$
最小分辨距离	$\delta l = 1.22\frac{\lambda S}{nD}$	$\delta l' = 1.22\frac{\lambda S}{n'D}$

4.5 多缝夫琅和费衍射

缝间干涉因子 相邻两束光相位差为

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}d\sin\theta$$

得到复振幅

$$E_p = E_{0单}\frac{\sin\alpha}{\alpha}(1 + e^{i\Delta\varphi} + \cdots + e^{i(N-1)\Delta\varphi})$$

从而光强为

$$I_p = I_{0单}(\frac{\sin\alpha}{\alpha})^2(\frac{sin(N\beta)}{\sin\beta})^2$$

我们称

$$(\frac{sin(N\beta)}{\sin\beta})^2$$

为缝间衍射因子，又称为多光束干涉因子。其中

$$\alpha = \frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta$$
$$\beta = \frac{\Delta\varphi}{2} = \frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta$$

缝间干涉因子的性质　缝间干涉因子有如下性质

- 主极大为$\beta = k\pi$
- 零点位置为$\beta = (k + \frac{m}{N})\pi$
- 两个主极大之间有$N-1$个暗纹和$N-2$个亮纹

多缝衍射的性质　多缝衍射条纹有如下性质

- 衍射强度被单缝图样调制
- 主极强是明亮纤细的亮纹，相邻亮纹间是一片宽广的暗区，暗区中存在一些微弱的明条纹，称次极强。
- 主极强是各缝出来的衍射光干涉而成的，其位置满足光栅方程

$$d\sin\theta = k\lambda,\ k = 0, \pm1, \pm2, \cdots$$

- 主极强数目有限，为$k = [\frac{d}{\lambda}]$

半角宽度　第k个主极强的半角宽度（以两侧暗线为界）为

$$\Delta\theta_k = \frac{\lambda}{Nd\cos\theta_k}$$

这也是能够分辨两谱线的最小角间隔。

缺级　若$d = ka$，则第k级变为暗条纹，该现象称为缺级。

各项作用　单缝衍射因子：

- 影响强度在各级主极强间的分配
- 调制缝间干涉强度
- 不改变主极强的位置和半角宽度

缝间干涉因子：

- 确定主极强的位置
- 决定主极强的半角宽度

4.6　光栅光谱仪

光栅的色散本领　角色散本领

$$D_\theta = \frac{\delta\theta}{\delta\lambda} = \frac{k}{d\cos\theta_k}$$

线色散本领

$$D_l = \frac{\delta l}{\delta\lambda} = \frac{kf}{d\cos\theta_k}$$

另有$D_l = fD_\theta$的关系。

色分辨本领

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = kN$$

泰勒判据　两光点衍射图样的合强度分布曲线，当鞍点的强度（交叠的最小值点）恰好等于一个发光点所形成的衍射图样的最大值时，认为这两个点刚好可以分辨。

闪耀光栅　闪耀光栅可以将大部分光能集中在中央主极大，它有两种工作方式：

1. 垂直于光栅平面入射，沿$2\theta_b$方向反射：

$$d\sin 2\theta_b = k\lambda_{kb}$$

2. 垂直于槽面入射，垂直反射：

$$d\sin\theta_b + d\sin\theta = k\lambda_{kb}$$

5 光的双折射

5.1 双折射现象

寻常光与非常光 一束光入射到各向异性介质时，折射光分成两束。一束遵从折射定律，称为寻常光，简记为o光；令一束一般不遵从折射定律，称为非常光，简记为e光。

光轴 当光在晶体内沿某个特殊方向传播时不发生双折射，该方向称为晶体的光轴，所有与其平行的直线均可称为光轴。根据光轴的数目可将晶体分为**单轴晶体**和**双轴晶体**。

振动方向 用偏振片来检查两折射光的振动方向可知

- o光振动方向始终**垂直于**o光线与光轴构成的平面(**o光主平面**)，与光轴方向相垂直。o振动的传播具有各向同性。
- e光振动方向始终**在**e光线与光轴构成的平面内(**e光主平面**)，不一定与光轴相垂直。e振动的传播具有各向异性。

晶体的主截面 晶体的表面法线与晶体光轴构成的平面。只与晶体相关，而与光线无关。

单轴晶体的光波面 根据惠更斯原理，各向异性晶体中波面具有如下性质

1. 折射光有两束$\Longrightarrow$晶体中任一点发出的次波应有两个波面
2. 存在o光和e光$\Longrightarrow$次波面为球面、(围绕光轴的）旋转椭球面
3. 沿光轴方向不发生双折射$\Longrightarrow$光轴方向两波面应相切

折射率 o光折射率为恒定值n_o，e光折射率n_e随方向而变化（波面是一个椭球），它们在光轴方向相等。$n_e > n_o$的称为**正晶体**，$n_e < n_o$的称为**负晶体**。

惠更斯作图法（作图暂缺） 根据惠更斯原理，可以大致作出o光和e光的光路

1. 光轴平行晶体表面，平行入射面，自然光垂直界面入射：
2. 光轴平行晶体表面，垂直入射面，自然光与界面斜入射：
3. 光轴与晶体表面斜交，自然光垂直界面入射，与光轴有一定夹角：

次波面的公切面即为其波阵面(等相面)，对应相速度。

5.2 晶体光学元件

二向色性偏振器 某些晶体对o光和e光的吸收有很大差异，称为晶体的二向色性。

偏振棱镜 以下棱镜对o光和e光作用不同

- 尼科尔棱镜：入射角大于临界角时，o光全反射，e光透射
- 洛匈棱镜：光轴垂直于入射面，e光可以用折射定律
- 渥拉斯顿棱镜：两块晶体内o光和e光互换

相位关系 对于负晶体有$V_e > V_o$，正晶体有$V_o > V_e$：

	入射面A	波晶片产生的相位延迟	输出面B
o光相位	φ_{o1}	$\Delta_o = \frac{2\pi}{\lambda} n_o d$	$\varphi_{o2} = \Delta_o + \varphi_{o1}$
e光相位	φ_{e1}	$\Delta_e = \frac{2\pi}{\lambda} n_e d$	$\varphi_{e2} = \Delta_e + \varphi_{e1}$
oe光之差	$\Delta\varphi_1 = \varphi_{o1} - \varphi_{e1}$	$\Delta = \Delta_o - \Delta_e$	$\Delta\varphi = \Delta\varphi_1 + \Delta$

偏振态判定 判断光通过波片的偏振态判定分为以下三个步骤

1. 将入射光的电矢量E按照波晶片的e轴和o轴分解成E_e和E_o，其振幅A_e和A_o，并根据入射光的偏振态确定在波晶片输入面上o光对e光的相位差
2. 在波晶片输出面出射的o光和e光的振幅仍为A_e和A_o，但相位差要附加上晶片所引起的E_o对E_e的相位差
3. 出射光的偏振态可根据以前建立的偏振态的判据判定

四分之一波片　选择厚度为

$$\Delta = \pm(2m+1)\frac{\pi}{2}$$

晶片，使oe光的相位差为

$$(n_o - n_e)d = \pm(2m+1)\frac{\lambda}{4}$$

其有效光程差为$\pm\frac{\lambda}{4}$，有效相位差为$\pm\frac{\pi}{2}$。其中的正负号与晶体的正负性无关。

四分之一波片检偏　经过四分之一波片后

1. $\alpha = \frac{\pi}{4}$，$A_o = A_e$时，线偏振光$\longrightarrow$圆偏振光
2. $\alpha = 0, \frac{\pi}{2}$，$A_o?A_e$时，线偏振光$\longrightarrow$线偏振光
3. $\alpha \neq 0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}$，$A_o \neq A_e$时，线偏振光$\longrightarrow$椭圆偏振光
4. $\alpha = 0, \frac{\pi}{2}$时，椭圆偏振光$\longrightarrow$线偏振光
5. $\alpha \neq 0, \frac{\pi}{2}$时，椭圆偏振光$\longrightarrow$椭圆偏振光
6. α任意，圆偏振光$\longrightarrow$线偏振光

因此四分之一波片与偏振片一样，可以区分自然光和圆偏振光，也可区分部分偏振光和椭圆偏振光。

二分之一波片　选择厚度为

$$\Delta = \pm(2m+1)\pi$$

晶片，使oe光的相位差为

$$(n_o - n_e)d = \pm(2m+1)\frac{\lambda}{2}$$

它可以使线偏振光振动面转过2α角度。

全波片　选择厚度为

$$\Delta = 2m\pi$$

晶片，使oe光的相位差为

$$(n_o - n_e)d = \lambda$$

5.3 平行偏振光的干涉

振幅关系（缺图） 设初始振幅为A_1，则从P_1入射后

$$A_{o1} = A_1 \sin\alpha$$
$$A_{e1} = A_1 \cos\alpha$$

投影在P_2上得到

$$A_{o2} = A_1 \sin\alpha \sin\beta$$
$$A_{e2} = A_1 \cos\alpha \cos\beta$$

设出射后两振动相位差为$\Delta\varphi$，则出射后光强为

$$\begin{aligned} I =& I_{o2} + I_{e2} + 2\sqrt{I_{o2} I_{e2}} \cos\Delta\varphi \\ I_{o2} =& A_{o2}^2 = A_1^2 \sin^2\alpha \sin^2\beta \\ I_{e2} =& A_{e2}^2 = A_1^2 \cos^2\alpha \cos^2\beta \end{aligned}$$

相位关系 入射光在波晶片上分解的oe光分量间的相位差$\delta_{\text{入}}$取决于入射光偏振态，可取值0或π。通过波晶片后的相位差

$$\Delta = \frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_e)d$$

坐标轴投影引起的位相差δ'在两个投影分量方向一致时取0，相反时取π。综上，总相位差为

$$\Delta\varphi = \delta_{\text{入}} + \Delta + \delta'$$

特别地，若两偏振片垂直且$\alpha = 45°$，有

$$I_{\text{垂直}} = I_1 \sin^2(\frac{\Delta}{2})$$
$$I_{\text{平行}} = I_1 \cos^2(\frac{\Delta}{2})$$

显色偏振 若白光入射，且晶片均匀，屏上由于某种颜色干涉相消，则呈现它的互补色。若晶片不均匀，则屏上出现彩色图案。

5.4 人工双折射

光弹效应 又称应力双折射效应，应力导致折射率的各向异性。在一定应力范围内

$$n_o - n_e = k\frac{F}{S}$$

电光效应 **克尔效应**又称二次电光效应，满足

- 不加电场时液体各向同性，P_2不透光
- 加电场时各向异性分子取向有序，液体呈单轴晶体性质，光轴平行电场强度，P_2透光

此时给定克尔常数κ，有

$$n_o - n_e = \kappa E^2 = \kappa\frac{U^2}{d^2}$$

引起的相位差为

$$\Delta\varphi_\kappa = \frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_e)l = 2\pi l\frac{\kappa U^2}{\lambda d^2}$$

泡克尔斯效应又称线性电光效应，光传播方向与电场平行，电极透明，晶体是单轴晶体，光沿光轴传播方向，此时P_1与P_2垂直，满足

- 不加电场时，P_2不透光
- 沿光轴外加电场时，晶体变为双轴晶体且绕原光轴方向转动$45°$，同时带有双折射效应，且P_2透光

泡克尔斯效应引起的相位差为

$$\Delta\varphi_p = \frac{2\pi}{\lambda}n_o^3\gamma U$$

其中γ称为pkeersi常数。

磁致双折射 又称科顿-穆顿效应。某些透明液体在磁场作用下变为各向异性，性质类似于单轴晶体，光轴平行于磁场。满足关系

$$|n_e - n_o| \propto H^2$$

该效应需要很强的磁场才能观察到。

5.5 旋光性

旋光率 线偏振光沿光轴方向通过某些物质时，其振动面发生旋转。旋转的角度$\theta = \alpha l$，α为旋光率，与旋光物质和入射波长有关，对于溶液，还和旋光物质的浓度有关。

菲涅耳解释 线偏振光(E, ω)可看作是同频率(ω)、等振幅$(\frac{E}{\sqrt{2}})$、有确定相位差的左(L)、右(R)旋圆偏振光的合成。

左旋与右旋 不妨设入射时L和R的初相为0，光通过长为l的旋光物质后，相位之后，有

$$\varphi_R = \frac{2\pi}{\lambda} n_R l > 0$$
$$\varphi_L = \frac{2\pi}{\lambda} n_R l > 0$$

此时若$n_R > n_L$，则称为**左旋物质**；若$n_L > n_R$，则称为**右旋物质**。

螺线的反演性 随时间左（右）旋的圆偏光在空间上呈现右（左）旋螺线。

石英晶体性质 沿光轴方向只表现旋光性而无双折射性，垂直光轴方向只表现双折射性而无旋光性。

旋光晶片和半波片比较

	旋光晶片	半波片
晶片取向	光轴垂直于晶面	光轴平行于晶面
对应波长	对任何波长出射光为 线偏振光只是转角不同	只对特定波长出射光 为线偏振光
振动方向	对于确定旋向的晶片 光的振动面只向一个 方向转动一定的角度	转角度与光的振动面 和波片晶轴的夹角有关 可左转也可右转

量糖术 设溶液的比旋光率为$[\alpha]$，C为溶液浓度。对旋光溶液有

$$\theta = [\alpha] \cdot C \cdot l$$

磁致旋光　记V为韦尔代常数，对于磁致旋光物质有

$$\theta = V \cdot l \cdot B$$

该现象也称为法拉第效应。

磁致旋光和自然旋光的关系

1. 对自然旋光物质：振动面的左旋或右旋（迎着光看）是由旋光物质本身决定的，与光的传播方向无关
2. 对磁致旋光物质：光沿磁场与逆磁场方向传播，振动面旋向相反

其中顺着磁场方向看，顺时针为**正旋体**，逆时针为**负旋体**。

磁光隔离器　令磁致旋光的角度为45°，则反射光不能通过偏振片，这样可以消除反射光的干扰。