电磁学定理公式总结

于俊骜

2023 年 2 月 27 日

摘要

2022 秋 张红欣班 期末考试：2 月 24 日 **电学部分暂缺**

1 真空静电场

2 电介质

3 静电能

4 稳恒电流

5 真空静磁场

5.1 BSL 定律

磁荷相互作用:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{q_{m0}q_m}{r^2}\hat{r}, \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} N \cdot A^{-2} \tag{1}$$

磁荷 q_{m0} 产生的磁场强度:

$$\vec{H} = \frac{\vec{F}}{q_{m0}} \tag{2}$$

BSL 定律:

$$
\begin{cases}
\mathrm{d}\vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{I\,\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}}{r^3} \\
\mathrm{d}\vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{\vec{K}\,\mathrm{d}S\times\vec{r}}{r^3} \\
\mathrm{d}\vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{\vec{j}\,\mathrm{d}V\times\vec{r}}{r^3}
\end{cases} \tag{3}
$$

无限长直导线在 r 处磁感应强度:

$$
B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \tag{4}
$$

载流圆线圈在轴线上 z 处磁感应强度:

$$
B = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{5}
$$

磁偶极子的磁矩（S 的方向遵循右手螺旋定则）:

$$
\vec{m} = I\vec{S} \tag{6}
$$

载流圆线圈（磁偶极子）在无穷远处磁感应强度:

$$
\vec{B} = -\frac{\mu_0\vec{m}}{4\pi r_0^3} + \frac{3\mu_0(\vec{m}\cdot\vec{r}_0^3)}{4\pi\vec{r}_0^5} \text{ 或 } \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}(3(\vec{m}\cdot\hat{r})\hat{r}-\vec{m}) \tag{7}
$$

无限长密绕螺线管的磁感应强度（单位长度匝数为 n，电流强度为 I）:

$$
\vec{B}_{内} = \mu_0 n I\hat{z} \qquad \vec{B}_{外} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\phi} \tag{8}
$$

5.2 安培定律

安培定律:

$$
\begin{cases}
\mathrm{d}\vec{F}_{12} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{I_1\,\mathrm{d}\vec{l}_1\times(I_2\,\mathrm{d}\vec{l}_2\times\hat{r}_{12})}{r_{12}^2} = \dfrac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\dfrac{\mathrm{d}\vec{l}_1\times(\mathrm{d}\vec{l}_2\times\hat{r}_{12})}{r_{12}^2} \\
\mathrm{d}\vec{F}_{12} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{\vec{K}_1\,\mathrm{d}S_1\times(\vec{K}_2\,\mathrm{d}S_2\times\hat{r}_{12})}{r_{12}^2} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{\vec{K}_1\times(\vec{K}_2\times\hat{r}_{12})}{r_{12}^2}\,\mathrm{d}S_1\,\mathrm{d}S_2 \\
\mathrm{d}\vec{F}_{12} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{\vec{j}_1\,\mathrm{d}V_1\times(\vec{j}_2\,\mathrm{d}V_2\times\hat{r}_{12})}{r_{12}^2} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{\vec{j}_1\times(\vec{j}_2\times\hat{r}_{12})}{r_{12}^2}\,\mathrm{d}V_1\,\mathrm{d}V_2
\end{cases} \tag{9}
$$

两载流线圈的相互作用力:

$$
\vec{F}_{12} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{L1}\oint_{L2}\frac{I_1 I_2}{r_{12}^3}(\mathrm{d}\vec{l}_2\cdot\mathrm{d}\vec{l}_1)\vec{r}_{12} \tag{10}
$$

两根平行直导线间距 s，电流 I，长为 l 的一段受力:

$$\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0 I^2 l}{2\pi s} \tag{11}$$

安培定律和 BSL 定律的关系:

$$\mathrm{d}\vec{F}_{12} = I_1 \,\mathrm{d}\vec{l_1} \times \mathrm{d}\vec{B}(\vec{r}_{12}) \tag{12}$$

5.3 静磁场的基本定理

磁通量:

$$\Phi_B = \iint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \tag{13}$$

（高斯定理）设 S 是闭合曲面，则:

$$\begin{gathered} \iint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{gathered} \tag{14}$$

磁感应强度法向分量连续:

$$\hat{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \tag{15}$$

（环路定理）L 为一任意闭合回路，则:

$$\begin{gathered} \oint_L \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum_{\text{穿过 } L} I \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \end{gathered} \tag{16}$$

磁感应强度切向边值关系:

$$\hat{n} \times (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = \mu_0 \vec{K} \tag{17}$$

内径 R_1，外径 R_2，匝数 N，电流 I 的螺绕环磁场分布：

$$B = \begin{cases} 0, & r < R_1 \\ \mu_0 n I, & R_1 < r < R_2 \\ 0, & r > R_2 \end{cases} \tag{18}$$

磁矢势（有不确定性，通常取库伦规范 $\nabla \cdot \vec{A} = 0$）：

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \tag{19}$$

磁矢势与磁通量的关系:

$$\iint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_L \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{l} \tag{20}$$

5.4 磁场对电流的作用

安培力与安培力矩（$\mathrm{d}\vec{I}=\vec{I}\,\mathrm{d}l=I\,\mathrm{d}\vec{l}$）：

$$\vec{F}=\int \mathrm{d}\vec{I}\times\vec{B}_e \tag{21}$$

$$\vec{\tau}=\int \vec{r}\times(\mathrm{d}\vec{I}\times\vec{B}_e) \tag{22}$$

载流导线在均匀外磁场受力:

$$\vec{F}=I\vec{L}\times\vec{B}_e \tag{23}$$

载流线圈在外磁场中受力（安培力指向磁通量增加最快的方向，使通过线圈的磁通量有增加的趋势）：

$$\vec{F}=I\nabla\Phi \tag{24}$$

载流线圈的力学势能:

$$U=I\Phi \tag{25}$$

载流线圈的力矩:

$$\vec{\tau}=\vec{m}\times\vec{B}_e \tag{26}$$

小载流线圈的安培力和力学势能（可忽略外磁场的电流）：

$$\vec{F}=\vec{m}\times\nabla\vec{B}_e \tag{27}$$

$$U=-\vec{m}\cdot\vec{B}_e \tag{28}$$

5.5 带电粒子在磁场中的运动

带电粒子在磁场中受力:

$$\vec{F}=q\vec{v}\times\vec{B}_e \tag{29}$$

磁镜的临界投掷角与磁镜比的关系（B_0 为中间位置最弱磁场，B_m 为线圈处最强磁场）：

$$sin^2\theta_m=\frac{B_0}{B_m}=\frac{1}{R_{mi}} \tag{30}$$

霍尔电压:

$$U=\frac{IB}{nqd}=K\frac{IB}{d} \tag{31}$$

6 静磁场中的磁介质

6.1 磁介质

分子原子的磁矩是其中电子磁矩的叠加:

$$\vec{m}_m = \sum \vec{m}_e \tag{32}$$

穿过曲面 S 的磁化体电流（只可能出现在磁化非均匀处）:

$$\begin{aligned} I' &= \oint_{\partial S} \vec{M} \cdot \mathrm{d}\vec{l} \\ \vec{j}' &= \nabla \times \vec{M} \end{aligned} \tag{33}$$

不同介质交界面的磁化面电流:

$$\vec{K} = \hat{n} \times (\vec{M}_2 - \vec{M}_1) \tag{34}$$

半径 a，磁化强度 M 的均匀磁化球在轴线产生的磁感应强度:

$$\vec{B}(z) = \begin{cases} \frac{2\mu_0 \vec{M}}{3}, & |z| < a \\ \frac{2\mu_0 \vec{M}}{3} \frac{a^3}{z^3}, & |z| > a \end{cases} \tag{35}$$

6.2 介质中静磁场的基本规律

（磁介质中的高斯定律）设 S 是闭合曲面，B 是总的磁感应强度，则:

$$\begin{aligned} \Phi_B &= \iint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned} \tag{36}$$

磁介质中磁感应强度的法向分量连续

$$\hat{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \tag{37}$$

磁场强度:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \tag{38}$$

（磁介质中的环路定理）L 为一任意闭合回路，则:

$$\begin{aligned} \oint_L \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} &= \mu_0 \sum_{\text{穿过 } L} I_0 \\ \nabla \times \vec{H} &= \vec{j_0} \end{aligned} \tag{39}$$

磁场强度切向边值关系:

$$\hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{K}_0 \tag{40}$$

6.3 磁化规律及其微观机制

相对磁导率（χ_m 是磁化率，大于 0 顺磁，小于 0 抗磁，真空中为 0）:

$$\mu_r = 1 + \chi_m \tag{41}$$

绝对磁导率:

$$\mu = \mu_0 \mu_r \tag{42}$$

线性各向同性磁介质的本征方程:

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \chi_m \vec{H} \\ \vec{B} &= \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0(1 + \chi_m)\vec{H} = \mu\vec{H} \end{aligned} \tag{43}$$

6.4 边值关系和磁路定理

若磁介质交界面无传导电流 K_0:

$$\begin{aligned} H_{1\tau} &= H_{2\tau} \\ \frac{B_{1\tau}}{B_{2\tau}} &= \frac{\mu_1}{\mu_2} \end{aligned} \tag{44}$$

磁介质交界面的折射定律:

$$\frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \tag{45}$$

磁介质交界面两侧磁感应强度大小的关系:

$$B_1 = (\frac{1 + (\frac{\mu_1}{\mu_2})^2 \tan^2\theta_1}{1 + \tan\theta_1})^{\frac{1}{2}} B_2 \tag{46}$$

磁阻:

$$R_{mi} = \int \frac{\mathrm{d}l_i}{\mu_i S_i} \tag{47}$$

磁势降:

$$U_m = \Phi R_m \tag{48}$$

磁动势:

$$\epsilon_m = N I_0 \tag{49}$$

（支路定律）穿过支路任一截面的磁通守恒:

$$\Phi_B = B \cdot S = \mathrm{const} \tag{50}$$

（节点定律）汇聚于任一节点的各磁通代数和为 0:

$$\sum_i \Phi_i = 0 \tag{51}$$

（回路定律）磁动势等于各段磁势降代数和:

$$\epsilon_m = \sum_i \Phi_i R_{mi} \tag{52}$$

6.5 静磁场的唯一性定理及应用

对于全空间而言，真空中填充介质前后:

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \vec{H}_0 \\ \vec{B} &= \mu_r \vec{B}_0 \end{aligned} \tag{53}$$

任一点处磁化电流、传导电流、总电流的关系（当各向同性磁介质填满全空间时，j 可替换为 K，分区均匀则不行）:

$$\begin{aligned} \vec{j} &= \mu_r \vec{j}_0 \\ \vec{j}' &= \chi_m \vec{j}_0 \end{aligned} \tag{54}$$

7 电磁感应

7.1 电磁感应定律

磁通量的变化率:

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = S\cos\theta\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} + B\cos\theta\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} - BS\sin\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \tag{55}$$

法拉第电磁感应定律（通量法则）:

$$\epsilon = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \tag{56}$$

（时变磁场的高斯定理）设 S 是一闭合曲面，则:

$$\begin{aligned} \Phi_B &= \iint_S \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S} \\ \nabla\cdot\vec{B} &= 0 \end{aligned} \tag{57}$$

感应电量:

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} -\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{R} \tag{58}$$

n 匝线圈的全磁通:

$$\Psi = \sum_{n=1}^{N}\Phi_i \tag{59}$$

7.2 动生电动势和感生电动势

动生电动势的定义式（洛伦兹力 $\vec{f} = -e\vec{v}\times\vec{B}$ 充当非静电力）:

$$\epsilon = \int_L (\vec{v}\times\vec{B})\cdot\mathrm{d}\vec{l} \tag{60}$$

一段导体的动生电动势（可推出闭合回路在匀强磁场平移产生的动生电动势为 0）:

$$\epsilon = \int_a^b (\vec{v}\times\vec{B})\cdot\mathrm{d}\vec{l} = (\vec{x}\times\vec{B})\cdot\vec{L}_{AB} \tag{61}$$

长为 L 的直导线绕一端在匀强磁场以角速度 ω 转动的动生电动势:

$$\epsilon = -\frac{1}{2}B\omega L \tag{62}$$

涡旋电场:

$$\vec{E}_{\text{旋}} = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \tag{63}$$

涡旋电场与总电场的关系:

$$\vec{E}=\vec{E}_{势}+\vec{E}_{旋}=-\nabla U-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \tag{64}$$

涡旋电场的微积分性质:

$$\begin{aligned}
\iint_S \vec{E}_{旋}\cdot \mathrm{d}\vec{S}&=0\\
\int_L \vec{E}_{旋}\cdot \mathrm{d}\vec{l}&=\iint_S -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{S}\\
\nabla\cdot\vec{E}_{旋}&=0\\
\nabla\times\vec{E}_{旋}&=-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}
\end{aligned} \tag{65}$$

7.3 涡电流和电磁阻尼

（无）

7.4 自感与互感

互感系数（是对称的，即 $M_{12}=M_{21}$）:

$$\begin{aligned}
M_{12}&=\frac{\Phi_{12}}{I_1}=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{L2}\oint_{L1}\frac{\mathrm{d}\vec{l_1}\cdot\mathrm{d}\vec{l_2}}{r}\\
M_{21}&=\frac{\Phi_{21}}{I_2}=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{L1}\oint_{L2}\frac{\mathrm{d}\vec{l_2}\cdot\mathrm{d}\vec{l_1}}{r}
\end{aligned} \tag{66}$$

互感电动势:

$$\begin{aligned}
\epsilon_2&=-\frac{\mathrm{d}\Phi_{12}}{\mathrm{d}t}=-M_{12}\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}\\
\epsilon_1&=-\frac{\mathrm{d}\Phi_{21}}{\mathrm{d}t}=-M_{21}\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t}
\end{aligned} \tag{67}$$

半径 a 的原线圈与跟它共面且相距 l 的无限长直导线之间的互感系数:

$$M=\mu_0(l-\sqrt{l^2-a^2}) \tag{68}$$

半径分别为 a 和 b，相距很远距离为 c 的两磁偶极子的互感系数:

$$M=\frac{\pi\mu_0 a^2 b^2}{2c^3} \tag{69}$$

圆心相距很远 c 的两半径为 a 的共面原线圈的互感系数:

$$M = \frac{\mu_0 \pi a}{2}(\frac{a}{c})^3 \tag{70}$$

自感系数:

$$L = M_{11} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{L1}\oint_{L1}\frac{\mathrm{d}\vec{l_1}\cdot\mathrm{d}\vec{l_2}}{r} > 0 \tag{71}$$

自感电动势:

$$\epsilon = -\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t} = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \tag{72}$$

半径 a，长为 l，单位长度匝数 n 的长密绕螺线管自感:

$$L = \mu_0 \pi n^2 a^2 l \tag{73}$$

内外径分别为 a、b 的同轴电缆单位长度自感系数:

$$L = \frac{\mu_0 h}{2\pi}\ln\frac{b}{a} \tag{74}$$

内外径分别为 a、b 且内筒空心的同轴电缆单位长度自感系数:

$$L = \frac{\mu_0 h}{2\pi}(\frac{1}{4} + \ln\frac{b}{a}) \tag{75}$$

两线圈顺接串联:

$$L = L_1 + L_2 + 2M \tag{76}$$

两线圈反接串联:

$$L = L_1 + L_2 - 2M \tag{77}$$

两线圈同名端并联:

$$L = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M} \tag{78}$$

两线圈异名端并联:

$$L = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2M} \tag{79}$$

两线圈的耦合系数（$0 < k < 1$，$k = 0$ 称无耦合，$k = 1$ 称理想耦合）:

$$k = \frac{|M|}{\sqrt{L_1 L_2}} \tag{80}$$

7.5 暂态过程

似稳条件:

$$|R_1 - R_2| \ll \frac{2\pi}{\omega} c \tag{81}$$

似稳电路方程:

$$j = \sigma(E_{\text{势}} + K + E_{\text{旋}}) \tag{82}$$

时间常数:

$$\tau = \frac{L}{R} \tag{83}$$

RLC 回路闭合瞬间方程（$\beta = \frac{R}{2L}$，$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$，$q_0 = C\epsilon$）：

$$q = \begin{cases} q_0 - \frac{q_0 e^{-\beta t}}{2\gamma}((\beta+\gamma)e^{\gamma t} + (\beta-\gamma)e^{-\gamma t}), & \beta^2 - \omega_0^2 > 0, \gamma = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \\ q_0 - q_0(1+\beta t)e^{-\beta t}, & \beta^2 - \omega_0^2 = 0 \\ q_0 - q_0 e^{-\beta t}(\cos\omega t + \frac{\beta}{\omega}\sin\omega t), & \beta^2 - \omega_0^2 = 0 \end{cases} \tag{84}$$

8 磁能

8.1 载流线圈系统的磁能

单个线圈的磁能:

$$A = \frac{1}{2} I\Phi = \frac{1}{2} LI^2 \tag{85}$$

多个线圈的磁能（互感磁能加上自感磁能）:

$$\begin{aligned} W_m &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,j\neq i}^{n} M_{ij}I_iI_j + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} L_iI_i^2 \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} M_{ij}I_iI_j, (M_{ii} = L_i) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} I_i\Phi_i, \text{（}\Phi_i \text{ 表示总磁场在第 } i \text{ 个线圈中的磁通量）} \end{aligned} \tag{86}$$

8.2 载流线圈在外磁场中的磁能

载流线圈在外磁场中的磁能:

$$W_{外} = I\Phi_e = I\iint_S \vec{B}_e \cdot \mathrm{d}\vec{S} \tag{87}$$

载流线圈在均匀外磁场中的磁能:

$$W_{外} = I\vec{B}_e \cdot \vec{S} = \vec{m} \cdot \vec{B} \tag{88}$$

载流线圈在外磁场中的势能和磁能的关系:

$$U = -W_{外} \tag{89}$$

8.3 磁场的能量和磁能密度

磁能密度:

$$w_m = \frac{1}{2}\vec{B} \cdot \vec{H} \tag{90}$$

总磁能:

$$W_m = \frac{1}{2}\int_V \vec{B} \cdot \vec{H}\,\mathrm{d}V \tag{91}$$

宏观磁能密度与磁化功密度:

$$\delta a' = \frac{\delta A'}{V} = \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{B} = \mu_0\vec{H}\,\mathrm{d}\vec{H} + \mu_0\vec{H}\,\mathrm{d}\vec{M} = \mathrm{d}(\frac{1}{2}\mu_0\vec{H}) + \mu_0\vec{H}\,\mathrm{d}\vec{M} \tag{92}$$

8.4 利用磁能求磁力

若各线圈电流不变:

$$\begin{aligned} F_x &= (\frac{\partial W_m}{\partial x})_I \\ \vec{F} &= (\nabla W_m)_I \end{aligned} \tag{93}$$

若各线圈磁通量不变:

$$\begin{aligned} F_x &= (\frac{\partial W_m}{\partial x})_\Phi \\ \vec{F} &= (\nabla W_m)_\Phi \end{aligned} \tag{94}$$

9 麦克斯韦理论

9.1 麦克斯韦方程组

位移电流密度:

$$\vec{j}_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \tag{95}$$

极化电流密度:

$$\vec{j}_P = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \tag{96}$$

位移电流和传导电流大小比较:

$$I_D \ \frac{\epsilon_0 \omega}{\sigma} I_C \tag{97}$$

安培-麦克斯韦环路定理:

$$\begin{aligned} &\oint_C \vec{H} \cdot \mathrm{d}l = \iint_S (\vec{j}_0 + \vec{j}_D)\,\mathrm{d}\vec{S} = \iint_S (\vec{j}_0 + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t})\,\mathrm{d}\vec{S} \\ &\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_0 + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ &\nabla \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{j}_0 + \vec{j}_D + \vec{j}_m) \end{aligned} \tag{98}$$

积分形式的麦克斯韦方程组:

$$\begin{cases} \iint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \sum_{S\text{ 内}} q_0 \\ \int_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\iint_{S_L} \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{S} \\ \iint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0 \\ \int_L \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \iint_{S_L} (\vec{j}_0 + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t})\cdot \mathrm{d}\vec{S} \end{cases} \tag{99}$$

微分形式的麦克斯韦方程组:

$$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{D} = \rho_0 \\ \nabla\times\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla\cdot\vec{B} = 0 \\ \nabla\times\vec{H} = \vec{j}_0 + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases} \tag{100}$$

线性各向同性介质和欧姆导体的本征方程:

$$\begin{cases} \vec{D} = \epsilon_r\epsilon_0\vec{E} \\ \vec{B} = \mu_r\mu_0\vec{H} \\ \vec{j}_0 = \sigma(\vec{E}+\vec{K}) \end{cases} \tag{101}$$

电磁场的边值关系:

$$\begin{cases} \vec{n}\cdot(\vec{D}_2-\vec{D}_1) = \sigma_0 \\ \vec{n}\cdot(\vec{B}_2-\vec{D}_1) = 0 \\ \vec{n}\times(\vec{E}_2-\vec{E}_1) = 0 \\ \vec{n}\times(\vec{H}_2-\vec{H}_1) = \vec{K}_0 \end{cases} \tag{102}$$

9.2 平面电磁波

电磁波满足的波动方程:

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} - \frac{1}{\epsilon_r\epsilon_0\mu_r\mu_0}\nabla^2\vec{E} = 0 \\ \frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} - \frac{1}{\epsilon_r\epsilon_0\mu_r\mu_0}\nabla^2\vec{B} = 0 \end{gathered} \tag{103}$$

电磁波在介质中的传播速度:

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}}, c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \tag{104}$$

沿着 $\vec{k}$ 方向传播的单色平面电磁波的解（ω 是圆频率）:

$$\vec{E}(\vec{z}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{z}-\omega t)} \tag{105}$$

波长:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi v}{\omega} = \frac{v}{f} \tag{106}$$

相位:

$$\phi(\vec{r}, t) = \vec{k}\cdot\vec{z} - \omega t = \vec{k}\cdot(\vec{r} - vt\vec{k}) = \vec{k}\cdot\vec{r}_0 \tag{107}$$

相速度（等相位面传播的速度）:

$$v_p = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = v\vec{k} \tag{108}$$

平面电磁波的性质（k、E、B 三垂直且同相位同频率）:

$$\vec{k} \times \vec{E}_0 = \omega \vec{B}_0 \tag{109}$$

电、磁场能量时刻相等:

$$\epsilon E^2 = \mu H^{@} \tag{110}$$

折射率:

$$n = \frac{v}{v_p} = \sqrt{\epsilon_r \mu_r} \tag{111}$$

LC 回路振荡频率:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \tag{112}$$

9.3 电磁场的能量、动量、角动量

洛伦兹力:

$$f = q(\vec{E} + \vec{v} + \vec{B}) \tag{113}$$

能量密度及其瞬时值与按时间的平均值:

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E} + \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H} \\ w_0 &= \frac{1}{2}\epsilon E^2 + \frac{1}{2}\mu B^2 = \epsilon E^2 = \mu B^2 \\ \bar{w} &= \frac{1}{2}\epsilon E^2 \end{aligned} \tag{114}$$

能流密度及其瞬时值与按时间的平均值:

$$\begin{aligned}&\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}\\&\vec{S}_0=EH\hat{k}=\frac{\epsilon}{\mu}E^2\hat{k}=\epsilon E^2v\hat{k}=w\vec{k}\\&\bar{\vec{S}}=\bar{w}\vec{v}\end{aligned}\tag{115}$$

动量密度及其瞬时值与按时间的平均值:

$$\begin{aligned}&\vec{g}=\vec{D}\times\vec{B}\\&\vec{g}_0=DB\hat{k}=\epsilon E\mu\frac{\epsilon}{\mu}E\hat{k}=\frac{w}{v}\hat{k}=\frac{\vec{S}}{v^2}\\&\bar{\vec{g}}=\frac{\bar{\vec{S}}}{v^2}\end{aligned}\tag{116}$$

角动量密度:

$$\vec{l}=\vec{r}\times\vec{g}\tag{117}$$

电磁波强度（S 的周期平均值）:

$$I=\langle S\rangle=\frac{E_0B_0}{\mu_0}\langle\cos^2(kx-\omega t)\rangle=\frac{E_0B_0}{2\mu_0}=\frac{E_0^2}{2c\mu}=\frac{cB_0^2}{2\mu_0}\tag{118}$$

平行板电容器充电过程能量守恒:

$$\begin{aligned}\vec{E}&=\frac{Q}{\pi R^2\epsilon_0}\vec{k}\\\vec{B}&=\frac{\mu_0 r}{2\pi R^2}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\hat{\phi}\\\vec{S}&=-\frac{Qr}{2\pi^2R^4\epsilon_0}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\hat{r}\\W_e&=\frac{Q^2h}{2\pi R^2\epsilon_0}\\\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}&=\frac{Qh}{\pi R^2\epsilon_0}(\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t})=-\iint_S\vec{S}\cdot\mathrm{d}\vec{S}\end{aligned}\tag{119}$$

反射系数（$R=0$ 全反射，$R=1$ 全吸收）:

$$R=\frac{|\langle\hat{n}\cdot\vec{S}_{\text{反}}\rangle|}{|\langle\hat{n}\cdot\vec{S}_{\text{入}}\rangle|}=\frac{I_{\text{反}}}{I_{\text{入}}}\tag{120}$$

法向压力（压强）:

$$p=\langle w_{\text{入}}\rangle(1+R)\cos^2\theta=\frac{1+R}{2}\epsilon_0E_0^2=\cos^2\theta\tag{121}$$