数学分析 (B1) 总复习

于俊骜

2024 年 1 月 13 日

目录

1 极限

1.1 知识点

实数集的等价公理

1. Cauchy 列 $\Longleftrightarrow$ 收敛列
2. 列紧性：有界数列必有收敛子列
3. 确界原理：有（上/下）界 $\Longrightarrow$ 有（上/下）确界
4. 单调收敛：单调有界数列有极限
5. 闭区间套：一列收缩且长度趋于 0 的闭区间，能套出唯一实数
6. 有限覆盖（了解即可）：若一些开区间能覆盖一个闭区间，则能从其中挑出有限个覆盖这个闭区间

数列极限的定义叙述

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N > 0,\ n > N\text{时}, |a_n - a| < \varepsilon \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = a$$

Stolz 定理 有 $\frac{\infty}{\infty}$ 和 $\frac{0}{0}$ 两种，一定要判断是否能用。

函数极限的 $\epsilon - \delta$ 语言叙述 种类较多，可对照第一次小测复习。

L'hospital 法则 也是有 $\frac{\infty}{\infty}$ 和 $\frac{0}{0}$ 两种，记得要判断是否能用。

函数的 Cauchy 准则

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,\ x_1, x_2 > \in (x_0-\delta, x_0+\delta)\text{时}, |f(x_1)-f(x_2)| < \varepsilon \Longrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)\text{存在}$$

该结论对无穷处的极限也成立。

Heine 归结原理

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Longleftrightarrow \forall\, a_n \to x, \lim_{n\to\infty} f(a_n) = A$$

等价无穷小替换

$$\sin x \sim x, x \to 0 \qquad 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, x \to 0$$

常见无穷大的关系

$$x^x \gg a^x \gg b^x \gg x^\alpha \gg x^\beta \gg \ln x \gg \ln\ln x$$

其中 $a > b > 0, \alpha > \beta > 0$。

1.2 常用方法

判断数列是否收敛

- 单调有界
- 夹逼准则
- Cauchy准则（也是用来判断不收敛的最常用方法）
- 任何子列收敛且极限相同
- 利用列紧性取子列，用子列控制整个数列（难题中出现）

特别地，证明不收敛时，可以取一个不收敛子列或两个极限不同的收敛子列。

计算极限

- 定义法（题目要求时再这么做）
- 除以最高次项（适用于多项式）
- Stolz 或 L'hospital
- 取对数（对于乘积式和 n 在指数上的很好用）
- 放缩并使用夹逼准则
- （不）等式两边同时取极限
- 分子/分母有理化

- 凑成 e 的定义式
- Taylor 展开
- 化成 Riemann 和（极少数特定题）

1.3 注意事项

- Stolz 和 L'hospital 不能**反着用**
- 先判断收敛才能取极限
- 求和项数里有 n 时，不能逐项取极限
- 等价无穷小代换在加减时不能乱用
- 计算函数极限时要考虑左极限、右极限
- 考试时不要写自创缩写（如 C,d,Con），否则扣分后果自负

2 连续性

连续性的定义 以下是 $f(x)$ 在 x_0 连续的等价定义：

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \Longleftrightarrow f(x_0^+) = f(x_0^-) = f(x_0)$$

前一个定义表明连续的本质是“极限和函数可交换”。

间断点分类

1. 可去间断点：左右极限存在且相等
2. 跳跃点：左右极限存在且不等
3. 第二类间断点：至少一侧极限不存在

连续函数的运算 连续函数代数运算、乘方、复合在定义域内连续。

介值定理 区间上的连续函数可以取到边界值之间的一切值。一个直接的推论是**零点定理**。

一致连续 这是一个整体性质，不能说函数在某点一致连续。它指的是

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ |x_1 - x_2| < \delta \Longrightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

本质是 δ 只与 ε 有关，与 x 无关，可以与“一致收敛”类似理解。一致连续性常在一些用到 $\varepsilon - \delta$ 语言的复杂证明题中用到。

闭区间上函数的性质

1. 有界
2. 可以取到最值
3. 一致连续
4. 值域是闭区间

以上性质的本质是“连续函数将紧集映到紧集”，因此前三条性质对于有限个闭区间的并也成立。

2.1 常用方法

证明函数可取到某个值时，可以根据题目形式构造函数并运用介值定理。

本章题目较常规，正常做即可。

3 微分

3.1 知识点

导数的定义： 导数是用“差商的极限”定义的：

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

特别地，可以定义单侧导数

$$f'_{(}x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad f'_{+}(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

可导等价于左右导数存在且相等。

基本初等函数的导数 此时应当已经运用熟练，只需特别注意几个三角和反三角求导后的正负号（建议化为熟知的计算）。

导数的四则运算 高中就已学过，这里不再赘述。

复合函数求导的链式法则

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = \frac{d}{du}f(u) \cdot g'(x),\ u = g(x)$$

本质是一阶微分形式不变性。

反函数求导

$$g(y) = f^{-1}(y) \Longrightarrow g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

反函数是局部的，因此只要局部单调反函数就存在。

多项式的零点重数 x_0 是多项式 $P(x)$ 的 k 重零点当且仅当

$$f(x_0) = \cdots = f^{k-1}(x_0) = 0,\ f^k(x_0) \neq 0$$

微分的定义

$$dy = y'dx$$

只需要按题目要求求导数或微分即可，单变量的微分和导数没有本质区别。

一阶微分形式不变性

$$y = \varphi(x), z = f(\varphi(x)) \Longrightarrow dz = (f(\varphi(x)))'\,dx = f'(\varphi(x))\varphi'(x)dx = f(y)dy$$

参数方程求导

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dt}{dx}\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{1}{x'(t)}\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)' = \frac{y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t)}{(x'(t))^3}$$

中值定理　对于 $f \in C[a,b]$，若 $f(x)$ 在 (a,b) 可导，则

1. Rolle: $f(a)=f(b) \Longrightarrow \exists \xi \in (a,b), s.t.\ f'(\xi)=0$
2. Lagrange: $\exists \xi \in (a,b), s.t\ f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
3. Cauchy: $g'(x) \neq 0 \Longrightarrow \exists \xi \in (a,b), s.t.\ \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

中值定理相较 Taylor 展开的最大好处是不要求导函数连续。因此，题中出现“可导”而没出现“导函数连续”的条件时，首先想中值。Lagrange 最常用，如果遇到极其复杂的形式，多半是 Cauchy。

Darboux 介值定理　导函数满足介值性质。

　　该定理说明不是所有函数都是某个函数的导函数，也说明了导函数无第一类间断点。

凸函数的等价定义　对于 $\forall\, a \le x_1 < x_2 < x_3 < x_4 \le b$ 以及 $t \in [0,1]$

1. 原始定义：$f(ta+(1-t)b) \le tf(a)+(1-t)f(b)$
2. 三点判别法：
$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} \le \frac{f(x_2)-f(x_3)}{x_2-x_3}$$
3. 四点判别法：
$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} \le \frac{f(x_3)-f(x_4)}{x_3-x_4}$$

另外，对于二阶可导函数 $f(x)$，拐点处 $f''(x)=0$。也可以用二阶导的正负判断凸凹区间。

曲率与曲率半径

$$\kappa(x)=\frac{f''(x)}{(1+(f'(x))^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad R=\frac{1}{|\kappa|}$$

没什么用的公式，考前再背就行。

Taylor 展开　对于解析函数 $f(x)$

$$f(x_0)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^k}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x)$$

余项

- Peano: $R_n(x) = o((x-x_0)^n)$（要求 n 阶可导）
- Lagrange: $R_n(x) = \frac{f^{n+1}(\theta x)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$（要求 $n+1$ 阶可导）
- Cauchy: $R_n(x) = \frac{f^{n+1}(\theta x)}{(n+1)!}(1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1}$（用得少）
- 积分: $R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{n+1}(t)(x-t)^n dt$

其中 Lagrange 余项可用来证不等式。

常用方法

对于给定函数值和低阶导数值、求范围的题目，常常在任意一点 x 处展开，然后取特殊点处的值，再利用四则运算配出需要的形式。

3.2 注意事项

- 不要把左右导数和导数的左右极限混淆，后者很少用到
- 反函数求导要看清是在哪一个点求导（尤其是区分 x 还是 y）
- 构造函数使用中值定理时，注意新函数的连续性和可导性有无改变
- 判断凸凹性，能不用导数就不用导数，容易出错
- Taylor 展开时一定要看清几阶可导

4 积分

4.1 知识点

常用积分公式 尤其注意一些不熟悉公式的记忆

分部积分

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

事实上，不定积分每分部积分一次都会出一个 C，只不过我们只在最后添加。

换元法 定积分的换元要注意新元的范围，建议无论大小，都先对应着写一步，如果上限小、下限大，之后再换过来，避免差一个负号。

有理函数的积分 因式分解，拆成至多 2 次项，最后会出现很多 $\ln(1+x^2)$ 和 $\arctan x$。

定积分的定义

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{n=1}^{\infty} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

微积分基本定理 对于 $f \in C^1[a,b]$

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$

可积性的判定 最左侧三选一

$$\left.\begin{array}{r} f \in C[a,b] \\ f\text{间断点有限} \\ f\text{单调} \end{array}\right\} \Longrightarrow f \in R[a,b] \Longleftrightarrow \overline{S} = \underline{S} \Longrightarrow f(x)\text{有界}$$

积分中值定理

$$f \in C[a,b] \Longrightarrow \exists \xi \in (a,b), s.t. \int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

它的推广形式也很常用，即

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$$

积分的三角不等式

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$$

几何量	弧长	围成的面积
直角坐标	$L=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}dx$	$S=\int_a^b f(x)dx$
极坐标	$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{(r^2(\theta)+r'^2(\theta))^2}d\theta$	$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)d\theta$
参数方程	$L=\int_a^b\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}dt$	$S=\frac{1}{2}\int_a^b(x(t)y'(t)-x'(x)y(t))dt$

几何量	绕 x 轴旋转体体积	旋转体侧面积
直角坐标	$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx$	$S=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx$
极坐标	无	$S=2\pi\int_\alpha^\beta r(\theta)\sin\theta\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}d\theta$
参数方程	无	$S=2\pi\int_a^b y(x)\sqrt{x'^2(t)+y'^(t)}dt$

表 1: 几何量计算公式总结

积分定义的函数的求导

$$f(x)=\int_{q(x)}^{p(x)}F(x,t)dt\Longrightarrow f'(x)=p'(x)F(x,p(x))-q'(x)F(x,q(x))+\int_{q(x)}^{p(x)}\frac{\partial}{\partial x}F(x,t)dt$$

由于 B1 没学偏导数，所以通常遇到的是 $F(x,t)=\tilde{F}(t)$，即被积函数与 x 没关系。

几何应用 如上表总结：

另有绕 y 轴旋转体体积：

$$V=2\pi\int_a^b xf(x)dx$$

这些公式繁琐无趣，考前背背就行。

广义积分 广义积分分为瑕积分和无穷积分，都是先积分，再让积分限趋于某个值，该极限收敛。

4.2 常用方法

常见分部积分：

- 含 e^{ax} 项：将 e 指数积回去，对另一项求导；
- 含正余弦：将正余弦积回去，对另一项求导；
- 被积函数求导后性质很好（如 ln）：添一项 x。

常见换元

- 有 $g(x)$：令 $t = g(x)$
- 有 $\sqrt{1-x^2}$：令 $x = \sin\theta$ 或 $x = \cos\theta$
- 有 $\sqrt{1+x^2}$：令 $x = \sinh\theta$ 或 $x = \tan\theta$
- 三角函数项分子分母分别其次，且次数差为偶数：添入 $(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^n$ 后令 $t = \tan\theta$
- 全是三角：万能公式

这里 $g(x)$ 多半是某个长得像加了主角光环的项，如 $x^{\frac{1}{14}}$。

广义积分计算 可以完全按常义积分的方式计算（证明题可能不行）。

计算含积分的极限 可以尝试采用积分中值定理，取极限时 ξ 可能也有极限，得到所需结论。

分段估计 对一些精细的估计，可以把积分区间分成“好+小”，分别算。

微积分基本定理的应用 如果题目中出现了较复杂的函数值、一阶导（可能还有二阶导）的关系，一般是用微积分基本定理换到某一类。

4.3 注意事项

- 换元注意新元范围
- $\frac{1}{x}$ 积分是 $\ln|x|$，别忘绝对值
- 不定积分要加 C
- 几何计算时注意定义域
- 广义积分需要验证每个瑕点以及无穷的收敛性，但凡一处不收敛，整体就不收敛，不能乱用积分的性质（如奇函数在对称区间积分为 0）

5 常微分方程

5.1 知识点

一阶线性方程的通解

$$y' + p(x)y = q(x) \Longrightarrow y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx} + C\right)$$

常数变易法 将齐次方程通解中的 C 视为函数，然后带入非齐次方程，可以求出非齐次方程的通解。

该方法可推出一阶线性方程通解和部分二阶方程的解，可用于考场上忘记公式时现推。

Wronski 行列式

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

Liouville 公式 齐次方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

的两个解 y_1, y_2 的 Wronski 行列式满足

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt}$$

二阶齐次方程的解

$$y = C_1y_1 + C_2y_2,\ y_2 = y_1\int \frac{1}{y_1^2}e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt}dx$$

其中 y_1 需要已知。

二阶非齐次方程的特解

$$y_0 = \int \frac{y_1(t)y_2(x) - y_1(x)y_2(t)}{W(x)}f(t)dt$$

其中 y_1, y_2 是对应齐次方程的基本解组，$f(t)$ 是非齐次项。

二阶常系数齐次方程的解

$$y'' + ay' + by = 0$$

的特征方程为

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

设两个解为 λ_1, λ_2，则

$$y = \begin{cases} C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}, & \lambda_1 \neq \lambda_2 \\ (C_1 x + C_2) e^{\lambda_1 x}, & \lambda_1 = \lambda_2 \end{cases}$$

5.2 常用方法

一阶方程解法 先分类

1. 可分离变量方程
2. 齐次方程（换元 $z = \frac{y}{x}$）
3. 一阶线性方程
4. Euler 方程（换元 $z = e^y$）
5. Bernoulli 方程（换元 $z = \frac{1}{y}$）
6. Riccati 方程
7. 一阶隐式方程（了解即可）

我们往往这个顺序判断方程类型，如果都不是，那就要考虑换元了。不要害怕多次换元，复杂的方程换个两三次是常有的事，往往很难直接凑出来。

二阶常系数齐次方程的解 往往根据非齐次项的形式猜解。对于 $f(x) = P_m(x)e^{\mu x}$，$P_m(x)$ 是 m 次多项式（e 指数项也可以是正余弦，可用 Euler 公式变形）：

若 μ 不是特征方程的根，则设特解为 $y^* = Q_m(x)e^{\mu x}$，其中 $Q_m(x)$ 是 m 次多项式；若 μ 是特征方程的 k 重根，则设特解为 $y^* = x^k Q_m(x)e^{\mu x}$，其中 $Q_m(x)$ 是 m 次多项式。

5.3 注意事项

- 第一步一定是找特解
- 移项的时候避免两边同时除以 0
- 解方程的过程是求局部解，因此解的区间不一样，得到的形式可能略有差别（比如 $\ln|x|$ 的绝对值）
- 常数 C 要写明范围，因为不一定可以取整个实轴
- 解的一般表达式中的积分号不是不定积分，而是不定积分中 $C=0$ 的那一个原函数（只是这么写方便）
- 背公式以及实际计算时注意正负号

6 无穷级数

6.1 知识点

比较判别法 对于正项级数，有以下比较判别法

- 常规的比较判别法
- 比较判别法的极限形式
- Cauchy 判别法（和几何级数比较）
- D'Alembert 判别法
- Rabbe 判别法（如 $\frac{1}{n\ln n}$）
- 积分判别法（要求单减）

一般级数的判别法

- 部分和收敛（定义）
- Cauchy 准则
- Leibniz 判别法
- Dirichlet 判别法
- Abel 判别法

Mertens 定理　两个级数收敛且至少其中一个绝对收敛，则它们的 Cauchy 乘积收敛。

一致收敛判别法

- Cauchy 准则
- Dirichlet 判别法
- Abel 判别法
- β_n 判别法
- Weierstrass 判别法

一致收敛级数的性质　保连续性，可逐项积分、求导。

幂级数的收敛半径

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

幂级数的性质　幂级数在收敛域上内闭一致收敛。

Abel 第二定理　幂级数在端点处收敛则和函数左（右）连续。

Stirling 公式

$$n!\sim\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}$$

6.2　常用方法

比较对象　正项级数的比较判别法和 Weierstrass 判别法，最常用的比较对象都是 p 级数。

判断数项级数发散　最简单方法是通项不趋于 0。

判别不一致收敛的方法

- β_n 判别法
- Cauchy 准则
- 端点发散

内闭一致收敛　可用来证明连续、可导这样的逐点性质。

级数求和　对于幂级数，根据形式适当求导、积分、凑 Taylor；对于含有积分式的项，想办法换序。

6.3 注意事项

- 只有正项级数才能用比较判别法
- 积分判别法尽量少用，浪费时间
- 不要被前面有限项忽悠了
- 判断收敛性时要注意端点
- β_n 的定义要背对