第二十四讲

Thm（可分 B-A）

X 可分 ⇒ X^* 中有界集弱*列紧

Thm（Alaoglu）

X^* 中闭单位球弱*紧

Thm（Eberlein-Smulian）

(1) 自反空间中有界集弱列紧

(2) 自反空间中闭单位球弱自列紧

Pf (1) 只需证：$\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ with $\sup_n \|x_n\| < \infty$

有子列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 弱收敛.

令 $Y \stackrel{def}{=} \overline{\mathrm{span}(\{x_n\}_{n=1}^{\infty})}$

$\Rightarrow Y \overset{闭}{\hookrightarrow} X$ 且 Y 可分

$\overset{pettis}{\Rightarrow}$ $\left.\begin{array}{l} Y \text{ 自反} \\ Y \text{ 可分} \end{array}\right\} \Rightarrow Y^{**}$ 可分

$\overset{Banach}{\Longrightarrow} Y^*$ 可分

$\overset{可分 B-A}{\Longrightarrow} Y^{**}$ 中有界集弱*列紧

$\overset{\{x_n^{**}\}_{n=1}^{\infty} 有界}{\Longrightarrow}$ $\{x_n^{**}\}_{n=1}^{\infty}$ 有子列 $x_{n_k}^{**} \xrightarrow{w^*} x_0^{**} \in Y^{**}$

for some $x_0 \in Y$

$\Rightarrow \forall f \in Y^*$

$f(x_n) = x_n^{**}(f) \to x_0^{**}(f) = f(x_0)$

$\Longrightarrow \quad \forall F \in X^*$

$$F(x_{n_k}) = (F|_Y)(x_{n_k}) \to (F|_Y)(x_0) = F(x_0)$$

$\Longrightarrow \quad x_{n_k} \xrightarrow{w} x_0$

(2) $\quad \sup_n \|x_n\| \leq 1$

$\overset{\text{by (1)}}{\Longrightarrow} \quad \exists \ x_{n_k} \xrightarrow{w} x_0$

$\overset{\text{HB}}{\Longrightarrow} \quad \exists \ f \in X^*, \ \|f\| = 1 \quad \text{s.t.} \quad f(x_0) = \|x_0\|$

$$\Longrightarrow \quad \|x_0\| = |f(x_0)| = \lim_{k\to\infty} |f(x_{n_k})| \leq \sup_k \|f\| \, \|x_{n_k}\|$$

$$\leq 1.$$

<u>HW</u>: Ex. 2.5.17. 2.5.18. 2.5.20

谱理论

Def X — 复 Banach 空间

对 $A, B \in \mathcal{L}(X)$,

$$(AB)x \overset{def}{=} A(Bx), \quad x \in X$$

则 1° $A(BC) = (AB)C$

2° $A(B+C) = AB + AC$

$(A+B)C = AC + BC$

3° $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$

4° $AI = A = IA$

5° $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$

$\Rightarrow$ $\mathcal{L}(X)$ 是 Banach 代数.

Def 称 $A \in \mathcal{L}(X)$ 可逆是指: $\exists B \in \mathcal{L}(X)$ s.t.

$$AB = I = BA$$

Def $\sigma(A) \overset{def}{=} \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A \text{ 不可逆}\}$

称为 A 的谱 (spectrum), $\sigma(A)$ 的元素称为谱点

$$\rho(A) \overset{def}{=} \mathbb{C} \setminus \sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A \text{ 可逆}\}$$

称为 A 的预解集 (resolvent set), $\rho(A)$ 的元素称为 A 的正则值

Def 如果 $\lambda \in \mathbb{C}$ s.t. $\ker(\lambda I - A) \neq \{0\}$, i.e.

$\exists\, 0 \neq x \in X$ s.t. $Ax = \lambda x$, 则称 λ 是 A 的特征值

$\sigma_p(A) \overset{def}{=} \{A \text{ 的特征值}\}$, 称为 A 的点谱.

例: $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n) \Rightarrow \sigma(A) = \sigma_p(A) \neq \phi$, $\#\sigma(A) \leq n$

例：乘法算子 $A: C[0,1] \to C[0,1]$
$$u(t) \mapsto t\,u(t)$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_p(A) \neq \phi$$

$$(\lambda I - A)u = 0 \iff (\lambda - t)u(t) = 0, \quad \forall t \in [0,1]$$

$$\Rightarrow \quad u \equiv 0$$

$\lambda \in \mathbb{C}$ $\nearrow$ $\mathrm{Ker}(\lambda I - A) \neq \{0\} \longrightarrow \lambda \in \sigma_p(A)$

$\lambda \in \mathbb{C}$ $\searrow$ $\mathrm{Ker}(\lambda I - A) = \{0\}$:

- $\nearrow$ $\begin{cases} \mathrm{Ran}(\lambda I - A) \neq X \\ \mathrm{Ran}(\lambda I - A) \overset{\text{dense}}{\subset} X \end{cases}$ 此时称λ为A的连续谱点，记为 $\lambda \in \sigma_c(A)$
- $\rightarrow$ $\overline{\mathrm{Ran}(\lambda I - A)} \neq X$ 此时称λ为A的剩余谱点，记为 $\lambda \in \sigma_r(A)$
- $\searrow$ $\mathrm{Ran}(\lambda I - A) = X \longrightarrow \lambda \in \rho(A)$ (by IMT)

[剩余谱 $\sigma_r(A)$ (residue spectrum)]

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A)$$

例： $A: C[0,1] \to C[0,1]$
$$u(t) \mapsto t\,u(t)$$

$$\sigma(A) = \sigma_r(A) = [0,1]$$

Pf 1° $\mathbb{C} \setminus [0,1] \subset \rho(A)$

设 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [0,1]$，令

$$T: C[0,1] \to C[0,1]$$
$$u(t) \mapsto \frac{1}{\lambda - t} u(t)$$

$$\Rightarrow \quad (\lambda I - A)T = I = T(\lambda I - A)$$

且 $\quad \|Tu\| \leq \left(\max_{t \in [0,1]} \frac{1}{|\lambda - t|} \right) \|u\|$

$\Rightarrow \quad T \in \mathcal{L}(X)$

$\Rightarrow \quad (\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$

$\Rightarrow \quad \lambda \in \rho(A)$

2° $[0,1] \subset \sigma_r(A)$

设 $\lambda \in [0,1]$

$\forall\, v \in \mathrm{Ran}(\lambda I - A)$, $\exists\, u \in C[0,1]$, s.t.

$$(\lambda - t)\,u(t) = v(t), \quad t \in [0,1]$$

取 $t=\lambda$

$\Rightarrow \quad v(\lambda) = 0$.

$\Rightarrow \quad 1 \notin \overline{\mathrm{Ran}(\lambda I - A)}$

$\Rightarrow \quad \overline{\mathrm{Ran}(\lambda I - A)} = X$

3° $[0,1] \subset \sigma_r(A) \subset \sigma(A) \subset [0,1]$

$\Rightarrow \quad \sigma(A) = \sigma_r(A) = [0,1]$

例: $A : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$

$\quad u(t) \mapsto t\,u(t)$

$$\sigma(A) = \sigma_c(A) = [0,1]$$

Pf 1° $\mathbb{C} \setminus [0,1] \subset \rho(A)$

与前例类似

2° $\forall\, \lambda \in [0,1]$, $\mathrm{Ran}(\lambda I - A) \neq X$

Claim $1 \notin \mathrm{Ran}(\lambda I - A)$

否则 $\exists\, u \in L^2$ s.t.

$$1 = (\lambda - t)\,u(t), \quad t \in [0,1]$$

$\Rightarrow \quad \dfrac{1}{\lambda - t} = u(t) \in L^2[0,1]$, 矛盾

3° $\forall \lambda \in [0,1]$, $\mathrm{Ran}(\lambda I - A) \overset{\text{dense}}{\subset} X$

$\forall v \in L^2$, $\forall \varepsilon > 0$.

$$u_\varepsilon(t) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\lambda - t} v(t) \chi_{[0,1] \setminus (\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon)}(t)$$

$\Rightarrow$ $u_\varepsilon \in L^2$ 且

$$\mathrm{Ran}(\lambda I - A) \ni (\lambda I - A) u_\varepsilon = \chi_{[0,1]\setminus(\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon)} \cdot v \xrightarrow{L^2} v \quad \text{as } \varepsilon \to 0^+$$

（由积分的绝对连续性）

$\Rightarrow$ $v \in \overline{\mathrm{Ran}(\lambda I - A)}$

4° $[0,1] \subset \sigma_c(A) \subset \sigma(A) \subset [0,1]$

Def 算子值函数 $R_\lambda(A): \rho(A) \to \mathcal{L}(X)$
$$\lambda \mapsto (\lambda I - A)^{-1}$$
称为 A 的预解式 (resolvent)

Lem 设 $T \in \mathcal{L}(X)$, $\|T\| < 1$, 则

(i) $(I - T)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$

(ii) $(I - T)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} T^n$ （von Neumann 级数）

(iii) $\|(I-T)^{-1}\| \leq \dfrac{1}{1 - \|T\|}$

Pf (i) 令
$$S_n \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n} T^k$$

$$\Rightarrow \quad \|S_{n+p} - S_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} T^k \right\|$$
$$\leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \|T\|^k < \frac{\|T\|^{n+1}}{1 - \|T\|}$$

$\overset{\mathcal{L}(X)\text{完备}}{\Longrightarrow}$ $\exists S \in \mathcal{L}(X)$ s.t.
$$\|S_n - S\| \to 0$$