第十七讲（2024.11.4）

Def X — 向量空间

如果函数 $p: X \to \mathbb{R}$ s.t.

(i)（正齐次性）$p(tx) = t\,p(x)$，$\forall x \in X$，$\forall t > 0$.

(ii)（次可加性）$p(x+y) \leq p(x) + p(y)$，$\forall x, y \in X$.

则称 p 是 X 上一个次线性泛函.

如果 p 还满足齐次性：

$$p(\lambda x) = |\lambda|\, p(x), \quad \forall x \in X,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},$$

则称 p 是半范数.

Rmk：1° 次线性泛函是凸函数.

$$p(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq p(\alpha x) + p((1-\alpha)y) = \alpha p(x) + (1-\alpha)p(y)$$

2° 半范数非负

$$\forall x \in X.\quad 2p(x) = p(x) + p(-x) \geq p(0) = 0$$

3° 如果半范数 p 还满足"$p(x) = 0 \Rightarrow x = 0$"，则 p 是范数

Thm（HBT over $\mathbb{R}$）

X — 实向量空间

p — X 上次线性泛函

M — 子空间

f — M 上线性泛函 s.t. $f(x) \leq p(x)$，$\forall x \in M$

则存在 X 上线性泛函 F，s.t.

(i) $F|_M = f$

(ii) $F(x) \leq p(x)$，$\forall x \in X$.

Lem 条件同上

设 $x_0 \in X \setminus M$.

$\tilde{M} = M \oplus \operatorname{span}\{x_0\}$

则 $\exists\ \tilde{f}: \tilde{M} \to \mathbb{R}$ 线性 s.t.

(i) $\tilde{f}|_M = f$

(ii) $\tilde{f}(x) \le p(x)$, $\forall x \in \tilde{M}$

Pf $\forall x, y \in M$,

$$f(x) + f(y) = f(x+y) \le p(x+y) \le p(x - x_0) + p(y + x_0)$$

$$\Rightarrow \quad f(x) - p(x - x_0) \le p(y + x_0) - f(y), \quad \forall x, y \in M.$$

$$\Rightarrow \quad \sup_{x \in M} [f(x) - p(x - x_0)] \le \inf_{y \in M} [p(y + x_0) - f(y)]$$

$\Rightarrow \quad \exists\ \beta \in \mathbb{R}$ s.t.

$$(*) \quad f(x) - p(x - x_0) \le \beta \le p(y + x_0) - f(y) \quad \forall x, y \in M$$

定义 $\tilde{f}: \tilde{M} \to \mathbb{R}$

$$x + \lambda x_0 \longmapsto f(x) + \lambda \beta$$

$\Rightarrow$ $\tilde{f}$ 线性 且 $\tilde{f}|_M = f$

再证: $\tilde{f}(x + \lambda x_0) \le p(x + \lambda x_0)$, $\forall x \in M$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$\lambda = 0$ 时, 平凡

$\lambda \ne 0$ 时, 不妨设 $\lambda > 0$ ($\lambda < 0$ 时 以 $-\lambda$ 代之)

在 $(*)$ 中 x, y 均代以 $\frac{x}{\lambda}$

$$f\left(\frac{x}{\lambda}\right) - p\left(\frac{x}{\lambda} - x_0\right) \leq \beta \leq p\left(\frac{x}{\lambda} + x_0\right) - f\left(\frac{x}{\lambda}\right)$$

$$\Rightarrow \quad f(x) - p(x - \lambda x_0) \leq \lambda\beta \leq p(x + \lambda x_0) - f(x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \underbrace{f(x) - \lambda\beta}_{\tilde{f}(x-\lambda x_0)} \leq p(x - \lambda x_0) \\ \underbrace{f(x) + \lambda\beta}_{\tilde{f}(x+\lambda x_0)} \leq p(x + \lambda x_0) \end{cases}$$

Pf of Thm

对两个线性泛函 g, h，如果

(i) $\mathrm{Dom}(g) \hookrightarrow \mathrm{Dom}(h)$

(ii) $h|_{\mathrm{Dom}(g)} = g$

则称 h 是 g 的一个延拓

令

$$\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \{ g : g \text{ 是 } f \text{ 的延拓}.\ g(x) \leq p(x),\ \forall x \in \mathrm{Dom}(g) \}$$

上引入偏序

$$g \lesssim h \stackrel{\text{def}}{\iff} h \text{ 是 } g \text{ 的延拓}$$

设 $\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{F}$ 的任一全序子集，令

$$Y = \bigcup_{g \in \mathcal{C}} \mathrm{Dom}(g)$$

$$\Rightarrow Y \hookrightarrow X$$

定义

$$G : Y \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto g(x) \quad \text{if } x \in \mathrm{Dom}(g)$$

$\mathcal{G}$ 全序 $\Rightarrow$ G 良定且为 $\mathcal{G}$ 的上界

$\overset{\text{Zorn}}{\Rightarrow}$ $\mathcal{F}$ 有极大元 F

Claim $\mathrm{Dom}(F) = X$

假设不然，则 $\exists x_0 \in X \setminus \mathrm{Dom}(F)$

$\overset{\text{Lem}}{\Rightarrow}$ $\exists$ $\mathrm{Dom}(F) \oplus \mathrm{span}\{x_0\}$ 上线性泛函 $\tilde{F}$ s.t.

(i) $\tilde{F}|_{\mathrm{Dom}(F)} = F$

(ii) $\tilde{F}(x) \leq p(x)$, $\forall x \in \mathrm{Dom}(F) \oplus \mathrm{span}\{x_0\}$

$\Rightarrow$ $\tilde{F} \in \mathcal{F}$ 且 $F \lneq \tilde{F}$，与 F 的极大性矛盾

Thm (HBT over $\mathbb{C}$)

X — 复向量空间

p — X 上半范数.

M — 子空间

$\forall$ 复线性泛函 $f: M \to \mathbb{C}$ with $|f(x)| \leq p(x)$, $\forall x \in M$

$\exists$ - - - - - $F: X \to \mathbb{C}$ s.t.

(i) $F|_M = f$

(ii) $|F(x)| \leq p(x)$, $\forall x \in X$.

Pf: Step 1 先把 X 看作实向量空间

令 $g \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Re} f$

$\Rightarrow$ g 为 M 上实线性泛函 s.t.

$$g(x) \le |f(x)| \le p(x), \qquad \forall x \in M.$$

前一Thm

$\Rightarrow$ $\exists\ G: X \to \mathbb{R}$ 实线性 s.t.

(i) $G|_M = g$

(ii) $G(x) \le p(x), \quad \forall x \in X.$

Step 2 复化

令

$$F(x) \overset{\text{def}}{=} G(x) - iG(ix)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F(x+y) = F(x) + F(y) \\ F(\alpha x) = \alpha F(x), \quad \forall x \in X.\ \forall \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Rightarrow F((\alpha_1 + i\alpha_2)x) = F(\alpha_1 x) + F(i\alpha_2 x) = \alpha_1 F(x) + \alpha_2 F(ix)$$

$$\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.\ \forall x \in X$$

$\Rightarrow$ 只需证 $F(ix) = iF(x), \quad \forall x \in X.$

$$\begin{aligned} F(ix) &= G(ix) - iG(i \cdot ix) \\ &= G(ix) + iG(x) \\ &= i(G(x) - iG(ix)) = iF(x) \end{aligned}$$

Step 3 $F|_M = f$

$$\begin{aligned} \forall x \in M.\quad F(x) &= G(x) - iG(ix) \\ &= g(x) - ig(ix) \\ &= \mathrm{Re} f(x) - i\,\mathrm{Re} f(ix) \\ &= \mathrm{Re} f(x) - i\underbrace{\mathrm{Re}[if(x)]}_{= -\mathrm{Im} f(x)} = f(x) \end{aligned}$$

Step 4 $|F(x)| \le p(x), \quad \forall x \in X$

$\forall x \in X$,

如果 $F(x) = 0$，平凡

设 $F(x) \ne 0$

$\Rightarrow \exists \theta \in \mathbb{R}$ s.t. $|F(x)| = e^{-i\theta} F(x)$

$$\Rightarrow |F(x)| = F(e^{-i\theta} x)$$

$$= G(e^{-i\theta} x) - i \underbrace{G(i e^{-i\theta} x)}_{=0} \quad (\because \text{LHS} \in \mathbb{R})$$

$$\le p(e^{-i\theta} x)$$

$$\overset{\text{齐次性}}{=} p(x)$$

Thm (HBT)

$(X, \|\cdot\|)$

$M \hookrightarrow X$

$\forall f \in M^*, \exists F \in X^*$ s.t.

$F|_M = f$ 且 $\|F\| = \|f\|$. (保范延拓)

Pf 令

$$p(x) \overset{\text{def}}{=} \|f\| \, \|x\|, \quad x \in X.$$

$$\Rightarrow |f(x)| \le \|f\| \, \|x\| = p(x), \quad \forall x \in M.$$

$\overset{\text{HBT over } \mathbb{C}}{\Rightarrow}$ $\exists$ X 上线性泛函 F s.t.

$F|_M = f$, $\underbrace{|F(x)| \le p(x)}$, $\forall x \in X$

$|F(x)| \le \|f\| \, \|x\|, \quad \forall x \in X$

$\Rightarrow \quad F \in X^* \quad$ 且 $\quad \|F\| \leq \|f\|$

而 $\|F\| \geq \|f\|$ 平凡

例 (HBT 中延拓不唯一)

$(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$, $\quad \|(x_1, x_2)\|_1 = |x_1| + |x_2|$

$M = \mathbb{R} \times \{0\}$

$f: M \to \mathbb{R}$, $(x, 0) \mapsto x$

$\Rightarrow \quad f \in M^* \quad$ 且 $\quad \|f\| = 1$

令

$$F_t : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x_1, x_2) \longmapsto x_1 + t x_2$$

$\Rightarrow \quad F_t \big|_M = f . \qquad \forall\, t \in (-1, 1)$

而 $\forall\, t \in (-1, 1)$

$$\left| F_t(x_1, x_2) \right| = |x_1 + t x_2| \leq |x_1| + |t|\,|x_2| \leq \|(x_1, x_2)\|_1$$

$\Rightarrow \quad \|F_t\| \leq 1 .$

Cor $\quad \forall x_0 \in X$, $\exists\, f \in X^*$ with $\|f\| = 1$ s.t.

$$f(x_0) = \|x_0\|$$

Pf 令 $\quad M \overset{\text{def}}{=} \operatorname{span}\{x_0\}$

$$f_0 : M \to \mathbb{K}$$

$$\lambda x_0 \longmapsto \lambda \|x_0\|$$

$\Rightarrow \quad |f_0(x)| = |\lambda|\,\|x_0\| = \|x\| . \quad \forall x = \lambda x_0 \in M$

$\Rightarrow \quad f \in M^* \quad$ 且 $\quad \|f_0\| = 1$

$\overset{HBT}{\Longrightarrow}$ $\exists f \in X^*$ s.t.

$$\begin{cases} f|_M = f_0 & \Longrightarrow \quad f(x_0) = f_0(x_0) = \|x_0\| \\ \|f\| = \|f_0\| = 1 \end{cases}$$

<u>Cor 2</u> $X \neq \{0\} \Longrightarrow X^* \neq \{0\}$

<u>Pf</u> $\exists\ 0 \neq x_0 \in X$

$\overset{Cor\ 1}{\Longrightarrow}$ $\exists f \in X^*$ with $\|f\| = 1$ s.t.

$$f(x_0) = \|x_0\| \neq 0$$