第十六讲 (2024.10.30)

闭图像定理

Def $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X,\ y \in Y\}$$

$$\|(x, y)\|_{X \times Y} = \|x\|_X + \|y\|_Y$$

$(X \times Y, \|\cdot\|_{X \times Y})$ 称为乘积空间.

X, Y 完备 $\Rightarrow$ $X \times Y$ 完备

Def: $T : X \to Y$ 线性

$$Gr(T) \overset{def}{=} \{(x, Tx) : x \in Dom(T)\}$$

称为 T 的图像

如果 $Gr(T)$ 是 $X \times Y$ 的闭子空间, 则称 T 是闭算子

Prop.

$$T \text{ 是闭算子} \iff \underbrace{\left.\begin{matrix} Dom(T) \ni x_n \to x \\ Tx_n \to y \end{matrix}\right\}}_{Gr(T) \ni (x_n, Tx_n) \to (x, y)} \text{ implies } \underbrace{\left\{\begin{matrix} x \in Dom(T) \\ y = Tx \end{matrix}\right.}_{(x, y) \in Gr(T)}$$

Rmk T 的定义域 $Dom(T)$ 不一定闭

例: (无界闭算子)

$$T = \frac{d}{dt} : C[0, 1] \to C[0, 1]$$

$$Dom(T) = C^1[0, 1]$$

T 是无界算子

设 $C^1[0, 1] \ni u_n \to u$

$$Tu_n = u_n' \to v$$

$$\underbrace{u_n(t) - u_n(0)}_{\to\, u(t) - u(0)} = \int_0^t u_n'(s)\,ds \longrightarrow \int_0^t v(s)\,ds$$

$$\Rightarrow \quad u(t) = u(0) + \int_0^t v(s)\,ds$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} u \in C^1[0,1] \\ u' = v \end{cases}$$

Prop $\left.\begin{array}{l} T \text{ 有界} \\ \mathrm{Dom}(T) \text{ 闭} \end{array}\right\} \Rightarrow T \text{ 闭}$ (Ex. 2.3.4.(1))

Thm (B.L.T.)

X — 赋范空间

Y — Banach空间

$\forall T \in \mathcal{L}(\mathrm{Dom}(T), Y)$ 可以唯一$\underbrace{\text{保范延拓}}_{\tilde{T}|_{\mathrm{Dom}(T)} = T \text{ 且 } \|\tilde{T}\| = \|T\|}$为 $\tilde{T} \in \mathcal{L}(\overline{\mathrm{Dom}(T)}, Y)$

Pf $\forall x \in \overline{\mathrm{Dom}(T)}$, $\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathrm{Dom}(T)$ s.t. $x_n \to x$

$$\overset{T\text{有界}}{\Longrightarrow} \quad \|Tx_n - Tx_m\| \le \|T\|\,\|x_n - x_m\| \to 0 \quad \text{as } n, m \to \infty$$

$$\Rightarrow \quad \{Tx_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ 是 } Y \text{ 中 Cauchy 列}$$

$$\overset{Y\text{完备}}{\Longrightarrow} \quad \exists\, y \in Y \quad \text{s.t.} \quad Tx_n \to y$$

定义映射

$$\begin{aligned} \tilde{T} : \overline{\mathrm{Dom}(T)} &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto y \end{aligned}$$

$\tilde{T}$ 良定，线性

再证明 $\tilde{T}$ 有界

$\forall\ x \in \overline{\mathrm{Dom}(T)}$,

$$\|\tilde{T}x\| = \|y\| = \lim_{n\to\infty} \|Tx_n\| \le \lim_{n\to\infty} \|T\|\,\|x_n\| = \|T\|\,\|x\|$$

$\Rightarrow\ \tilde{T} \in \mathcal{L}(\overline{\mathrm{Dom}(T)}, Y)$ 且

$$\|\tilde{T}\| \le \|T\|.$$

另一方面，平凡地有 $\|\tilde{T}\| \ge \|T\|$.

例: Fourier 变换

$$\hat{f}(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, e^{-2\pi i x\cdot\xi}\, dx, \qquad f \in L^1$$

Q: 如何定义 L^2 函数的 Fourier 变换?

$$L^1 \cap L^2 \overset{\text{dense}}{\subset} L^2$$

$$\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2, \quad \forall f \in L^1 \cap L^2. \quad (\text{Plancherel})$$

$\overset{\text{B.L.T.}}{\Longrightarrow}$ $\mathcal{F}: f \mapsto \hat{f}$ 可唯一、保范地延拓到 L^2 上.

Rmk: 有界算子 $\xrightarrow[\text{Ex. 2.3.4(1)}]{\text{B.L.T.}}$ 闭算子

Thm (CGT = Closed Graph Thm)

X, Y — Banach 空间

$T: X \to Y$ — 闭线性算子

$\mathrm{Dom}(T)$ 闭 $\Rightarrow$ $T \in \mathcal{L}(X, Y)$

Pf 1 $Gr(T)$ 是 $X \times Y$ 的闭子空间

$$\Rightarrow \quad (Gr(T), \|\cdot\|_{X\times Y}) \text{ 是 Banach 空间}$$

定义

$$\pi_1 : Gr(T) \to Dom(T)$$
$$(x, Tx) \mapsto x$$

$$\pi_2 : Gr(T) \to Y$$
$$(x, Tx) \mapsto Tx$$

$$\begin{tikzcd} & Gr(T) \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\ Dom(T) \arrow[rr, "T"'] & & Y \end{tikzcd}$$

$$\Rightarrow \quad T = \pi_2 \circ \pi_1^{-1}$$

π_1 是双射 $\overset{\text{IMT}}{\Longrightarrow}$ π_1^{-1} 有界

Dom(T) 闭

$$\Rightarrow \quad T = \pi_2 \circ \pi_1^{-1} \text{ 有界}$$

Pf 2 $Dom(T)$ 闭

$$\Rightarrow \quad (Dom(T), \|\cdot\|_X) \text{ 是 Banach 空间}$$

在 $Dom(T)$ 上定义另一范数(图像范数)

$$\|x\|_G \overset{\text{def}}{=} \|x\|_X + \|Tx\|_Y, \qquad x \in Dom(T)$$

Claim $(Dom(T), \|\cdot\|_G)$ 完备

设 $\|x_n - x_m\|_G \to 0$ as $n, m \to \infty$

$\Rightarrow$ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $Dom(T)$ 中 Cauchy 列

$\{Tx_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Y 中 Cauchy 列

$\Rightarrow$ $\exists\, x \in Dom(T)$ s.t. $x_n \to x$

$$\exists\, y \in Y \quad s.t. \quad Tx_n \to y$$

T 闭

$$\Rightarrow \quad y = Tx$$

$$\Rightarrow \quad \|x_n - x\|_G = \|x_n - x\|_X + \|Tx_n - Tx\|_Y$$

$$\to 0$$

现在 $\|\cdot\|_X \lesssim \|\cdot\|_G$

$\overset{\text{等价范数 Thm}}{\Longrightarrow} \quad \|\cdot\|_G \lesssim \|\cdot\|_X$

$$\Rightarrow \quad \exists\, C > 0 \quad s.t.$$

$$\|Tx\|_Y \leq \|x\|_G \leq C\|x\|_X, \quad \forall\, x \in Dom(T)$$

$\Rightarrow$ T 有界.

例：(Hellinger - Toeplitz)

H — Hilbert 空间

如果 $T: H \to H$ 自伴，i.e.

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle, \quad \forall\, x, y \in H$$

则 $T \in \mathcal{L}(H)$.

Pf：只需证明 T 是闭算子，然后用 CGT

设 $\begin{cases} x_n \to x \\ Tx_n \to y \end{cases}$

$\forall\, z \in H$,

$$\langle z, Tx \rangle = \langle Tz, x \rangle$$

$$= \lim_{n\to\infty} \langle Tz, x_n \rangle$$

$$= \lim_{n\to\infty} \langle z, Tx_n \rangle$$

$$= \langle z, y \rangle$$

$$\Rightarrow \quad y = Tx$$

Rmk: CGT 的妙处：

- 直接证明有界性（连续性）

  $\forall \{x_n\}$ with $x_n \to x \overset{?}{\Rightarrow} Tx_n \to Tx$

  （需证明收敛性）

- 验证闭算子

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{Dom}(T) \ni x_n \to x \\ Tx_n \to y \end{array}\right\} \overset{?}{\Rightarrow} \left\{\begin{array}{l} x \in \mathrm{Dom}(T) \\ y = Tx \end{array}\right.$$

  （收敛性已知）