第十三讲 (2024.10.21)

Thm H — Hilbert 空间

$a(\cdot,\cdot)$ — H 上共轭双线性函数.

如果 $\exists C>0$ s.t.

(*) $$|a(x,y)| \le C\|x\|\|y\|, \quad \forall x,y \in H,$$

则 $\exists A \in \mathcal{L}(H)$ s.t.

$$a(x,y) = \langle x, Ay\rangle, \quad x,y \in H.$$

且

$$\|A\| = \sup_{0\ne x,y\in H} \frac{|a(x,y)|}{\|x\|\|y\|}$$

Pf $\forall y \in H$. 定义

$$f_y(x) \overset{\text{def}}{=} a(x,y), \quad x \in H$$

$$\overset{(*)}{\Longrightarrow} f_y \in H^* \text{ 且 } \|f_y\| \le C\|y\|$$

$\overset{\text{Riesz}}{\Longrightarrow} \exists!\, z \in H$ s.t.

$$f_y(x) = \langle x, z\rangle, \quad x \in H$$

且 $\|z\| = \|f_y\|$.

定义
$$A: H \to H$$
$$y \mapsto z$$

$$\Rightarrow a(x,y) = f_y(x) = \langle x, z\rangle = \langle x, Ay\rangle$$

1° A is linear

2° $\forall y \in H$

$$\|Ay\| = \|z\| = \|f_y\| \le C\|y\|$$

$\Rightarrow \quad A \in \mathcal{L}(H)$ 且 $\|A\| \leq C$

$$\Rightarrow \quad \|A\| \leq \sup_{0 \neq x, y \in H} \frac{|a(x,y)|}{\|x\| \, \|y\|}$$

另一方面，

$$|a(x,y)| = |\langle x, Ay \rangle| \overset{C-S}{\leq} \|x\| \, \|Ay\|$$
$$\leq \|x\| \, \|A\| \, \|y\| , \quad \forall x, y \in H$$

$$\Rightarrow \quad \sup_{0 \neq x, y \in H} \frac{|a(x,y)|}{\|x\| \, \|y\|} \leq \|A\| .$$

Radon – Nikodym Thm

$(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ —— 测度空间

Given $0 \leq f \in L^1(\Omega, \mu)$. 令

$$\nu(A) \overset{def}{=} \int_A f \, d\mu , \quad A \in \mathcal{M} .$$

$\Rightarrow$ ν 是测度，且

$$\mu(A) = 0 \quad \Rightarrow \quad \nu(A) = 0$$

Def $(\Omega, \mathcal{M})$ —— 可测空间

μ, ν —— $(\Omega, \mathcal{M})$ 上测度.

如果

$$\mu(A) = 0 \quad \Rightarrow \quad \nu(A) = 0$$

则称 ν 关于 μ 绝对连续，记为 $\nu \ll \mu$

例：前面 $\nu(A) = \int_A f \, d\mu \quad \Rightarrow \quad \nu \ll \mu .$

Thm (Radon-Nikodym)

$(\Omega, \mathcal{M})$ —— 可测空间

μ, ν —— $(\Omega, \mathcal{M})$ 上 σ-有限测度.

$\nu \ll \mu \implies \exists!\, g \in L^1(\mu)$, $g \geq 0$ a.e s.t.

$$\nu(A) = \int_A g \, d\mu$$

g 称为 ν 关于 μ 的 R-N 导数. 记为 $g = \frac{d\nu}{d\mu}$

Pf 只对有限测度证明. 即假设 $\mu(\Omega) < \infty$
$\nu(\Omega) < \infty$

考虑测度

$$\rho(A) \overset{\text{def}}{=} \mu(A) + \nu(A), \quad A \in \mathcal{M}.$$

$L^2(\Omega, \rho)$ 中内积

$$\langle f, g \rangle = \int_\Omega f \bar{g} \, d\rho$$

令

$$\Lambda(f) \overset{\text{def}}{=} \int_\Omega f \, d\mu, \quad f \in L^2(\Omega, \rho)$$

$$\Rightarrow |\Lambda(f)| \leq \int_\Omega |f| \, d\mu$$

$$\leq \left(\int_\Omega |f|^2 d\mu \right)^{1/2} \left(\int_\Omega 1 \, d\mu \right)^{1/2}$$

$$\leq \|f\|_2 \, \mu(\Omega)^{1/2}$$

$\overset{\text{Riesz}}{\Longrightarrow} \exists!\, h \in L^2(\Omega, \rho)$ s.t.

$$(*) \quad \int_\Omega f \, d\mu = \Lambda(f) = \int_\Omega f \bar{h} \, d\rho, \quad f \in L^2(\Omega, \rho)$$

Claim 1 h 实值 a.e. ρ

$\forall A \in \mathfrak{M}$. 取 $f = \chi_A$

$$\overset{(*)}{\Longrightarrow} \quad \mu(A) = \int_A \overline{h}\, d\rho$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \int_A \operatorname{Im} h \, d\rho$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{Im} h = 0 \quad \text{a.e. } \rho$$

Claim 2 $0 < h(x) \leq 1$, a.e. μ

令 $A_1 \overset{\text{def}}{=} \{ x \in \Omega : h(x) \leq 0 \}$

$$\overset{f = \chi_{A_1}}{\Longrightarrow} \quad \int \chi_{A_1}\, d\mu = \int \chi_{A_1} h \, d(\mu + \nu)$$

$$\Rightarrow \quad \mu(A_1) = \int_{A_1} h \, d(\mu+\nu) \leq 0$$

$$\Rightarrow \quad \mu(A_1) = 0$$

令 $A_2 \overset{\text{def}}{=} \{ x \in \Omega : h(x) > 1 \}$

$$\Rightarrow \quad \int \chi_{A_2}\, d\mu = \int \chi_{A_2} h \, d(\mu+\nu)$$

$$\Rightarrow \quad 0 \geq \int_{A_2} (1-h)\, d\mu = \int_{A_2} h \, d\nu \geq \nu(A_2) \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad \int_{A_2} (1-h)\, d\mu = 0$$

$$\overset{1-h<0 \text{ on } A_2}{\Longrightarrow} \quad \mu(A_2) = 0$$

$$(*) \Rightarrow \quad \int f \cdot (1-h)\, d\mu = \int f \, d\nu, \quad \forall f \in L^2(\Omega, \rho)$$

对 $A \in \mathcal{M}$，令

$$f(x) = \frac{\chi_A}{h(x) + \frac{1}{k}}$$

$$\Rightarrow \int \chi_A \frac{1-h}{h+\frac{1}{k}} d\mu = \int \chi_A \frac{h}{h+\frac{1}{k}} d\nu$$

$$\xrightarrow[\text{令 } k\to\infty]{MCT} \int_A \frac{1-h}{h} d\mu = \int_A d\nu \qquad (**)$$

($\nu \ll \mu$ 且 $h>0$ a.e. μ $\Rightarrow$ $h>0$ a.e. ν)

令 $g = \frac{1-h}{h}$

$$\Rightarrow \nu(A) = \int_A g \, d\mu$$

$(**)$ 中 取 $A = \Omega \Rightarrow g \in L^1(\mu)$

Baire 纲定理 （BCT $\stackrel{def}{=}$ Baire Category Thm）

Def (X, d)

$E \subset X$

如果 $\bar{E}$ 无内点，则称 E 为疏集或无处稠密集

例：$\mathbb{R}$ 中

Cantor 集 是疏的

$\mathbb{Q}$ 不是疏集

Def 第一纲集 $\stackrel{def}{=}$ 可数个疏集之并 （贫集.瘦集）

第二纲集 $\stackrel{def}{=}$ 非第一纲集

剩余集 $\stackrel{def}{=}$ 第一纲集的余集

例：可数集之第一纲集

Thm (BCT) 完备度量空间是第二纲的.

Lem (闭球套定理)

设 (X, d) 完备. 一系列闭球 $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ s.t.

(i) $B_{n+1} \subset B_n$, $n = 1, 2, \cdots$

(ii) $\operatorname{diam} B_n \to 0$ as $n \to \infty$

则 $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \{x_0\}$ for some $x_0 \in X$.

Pf 设 $B_n = \overline{B(x_n, r_n)}$

$\forall n, m$, 不妨设 $n \geq m$

$\Rightarrow x_n \in B_n \subset B_m$

$\Rightarrow d(x_n, x_m) \leq r_m \to 0$ as $n, m \to \infty$

$\Rightarrow \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Cauchy 列

$\overset{X\text{完备}}{\Longrightarrow} \exists x_0 \in X$ s.t. $d(x_n, x_0) \to 0$

$\overset{B_m\text{闭}}{\Longrightarrow} x_0 \in B_m$, $\forall m$.

$\Rightarrow x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$.

如果 $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$. 则

$$d(x_0, y) \leq d(x_0, x_n) + d(x_n, y) \leq 2r_n \to 0$$

$\Rightarrow y = x_0$

Pf of BCT

假设 X 完备但 $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ with E_n 疏

任取 $B(x_0, r_0)$

E_1 疏 $\Rightarrow \exists B(x_1, r_1) \subset B(x_0, r_0)$, $r_1 < 1$ s.t.

$$\overline{B(x_1, r_1)} \cap \overline{E_1} = \phi$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{int}(\overline{E_1}) = \phi \Rightarrow \exists x_1 \in B(x_0, r_0) \setminus \overline{E_1} \\ \qquad \Rightarrow \text{dist}(x_1, \overline{E_1}) > 0 \\ \qquad \text{令 } r_1 < \min\{1, \frac{1}{2}\text{dist}(x_1, \overline{E_1})\} \end{array}\right]$$

E_2 疏 $\Rightarrow \exists B(x_2, r_2) \subset B(x_1, r_1)$, $r_2 < 1/2$ s.t.

$$\overline{B(x_2, r_2)} \cap \overline{E_2} = \phi$$

$$\vdots$$

Lem $\Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B(x_n, r_n)} = \{x\}$ for some $x \in X$

而 $\overline{B(x_n, r_n)} \cap \overline{E_n} = \phi$, $\forall n$

$\Rightarrow x \notin \overline{E_n}$, $\forall n$

$\Rightarrow x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{E_n} = X$ 矛盾.

例: l^2 的 Hamel 基不可数

假设 l^2 的某个 Hamel 基 B 可数. 记 $B = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$

令 $X_n \stackrel{def}{=} \text{span}\{x_1, \cdots, x_n\}$

$\Rightarrow X_n$ 闭 且 $l^2 = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$

$\overset{BCT}{\Longrightarrow}$ $\exists n_0$ s.t. X_{n_0} 有内点，矛盾.

HW 1° 证明：多项式全体组成的向量空间上赋以任何范数都不是 Banach 空间

2° (BCT 2)

设 (X, d) 完备，对一列开集 $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$\overline{U_n} = X, \ \forall n \Rightarrow \overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n} = X$$

3° Ex. 2.2.3, 2.2.4