# 第十二讲 (2024.10.16)

线性算子 = 线性映射

**Def**: $X, Y$ — 向量空间

如果映射 $T: X \to Y$ s.t.

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty, \quad \forall x, y \in X, \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K},$$

则称 $T$ 为线性算子.

特别地, 当 $Y = \mathbb{K}$ 时 称 $T$ 为线性泛函

例 (微分算子)

$\Omega \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$, $X = Y = C^\infty(\Omega)$

$$T \overset{\text{def}}{=} \sum_{|\alpha| \le k} a_\alpha \partial^\alpha$$

例: (积分算子)

$X = L^p(\Omega)$

$Y = \{\Omega \text{ 上可测函数}\}$

$K(\cdot, \cdot)$ — $\Omega \times \Omega$ 上可测函数

$$(Tu)(x) \overset{\text{def}}{=} \int_\Omega K(x, y)\, u(y)\, dy, \quad x \in \Omega$$

例 Fourier 变换

$$(\mathcal{F} u)(\xi) \overset{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\, e^{-2\pi i x \cdot \xi}\, dx$$

例: $f(u) = \int_\Omega u^2(t)\, dt$ 非线性泛函

Def $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$

$T: X \to Y$ —— 线性算子

如果 $\exists C > 0$ s.t.

$$\|Tx\|_Y \le C \|x\|_X, \quad \forall x \in X$$

则称 T 有界.

Rmk: T 有界 $\Longleftrightarrow$ T 把有界集映为有界集

(HW: Ex. 2.1.1)

Thm $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$

$T: X \to Y$ linear

T 有界 $\Longleftrightarrow$ T 连续 $\Longleftrightarrow$ T 在 0 连续

Pf: 1° 有界 $\Rightarrow$ 连续

$$\|x_n - x\|_X \to 0 \implies \|Tx_n - Tx\|_Y \le C \|x_n - x\|_X \to 0$$

2° 在 0 连续 $\Rightarrow$ 有界

假设 T 无界

$$\forall n, \exists x_n \in X \quad \text{s.t.} \quad \|Tx_n\|_Y > n \|x_n\|_X$$

令 $\tilde{x}_n \overset{def}{=} \frac{1}{n} \frac{x_n}{\|x_n\|_X}$

$$\Rightarrow \tilde{x}_n \to 0$$

$$\overset{T\text{连续}}{\Longrightarrow} T\tilde{x}_n \to 0$$

但 $\|T\tilde{x}_n\|_Y = \frac{\|Tx_n\|_Y}{n\|x_n\|_X} > 1, \quad \forall n$

矛盾.

Thm 有限维赋范空间之间的线性算子一定有界.

Pf 1° 先设 $X=\mathbb{K}^n$, $Y=\mathbb{K}^m$

$\Rightarrow Tx = Ax$ with $A=(a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$

$$\Rightarrow \|Tx\|_{\mathbb{K}^m} = \Big(\sum_{i=1}^m \Big|\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\Big|^2\Big)^{1/2}$$

$$\overset{C\text{-}S}{\le} \Big[\sum_{i=1}^m\Big(\sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2\Big)\Big(\sum_{j=1}^n |x_j|^2\Big)\Big]^{1/2}$$

$$=\Big(\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2\Big)^{1/2}\|x\|_{\mathbb{K}^n}$$

2° 一般情形

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & Y \\ \text{同构 } \varphi\downarrow & & \downarrow\psi \text{ 同构} \\ \mathbb{K}^n & \xrightarrow{\tilde{T}} & \mathbb{K}^m \end{array}$$

$\Rightarrow \tilde{T} = \psi\circ T\circ\varphi^{-1}$ 有界

$\Rightarrow T = \psi^{-1}\circ\tilde{T}\circ\varphi$ 有界

HW: 1° $\dim X<\infty \Rightarrow$ 线性算子 $T: X\to Y$ 有界

2° $\dim X=\infty$, $Y\ne\{0\}$, 则存在无界线性算子 $T: X\to Y$.

例: (无界算子)

$X=C^1[0,1]$, $Y=C[0,1]$, 均赋以一致范数.

$T=\frac{d}{dt}$

设 $u_n(t)=t^n$, $t\in[0,1]$, $n=1,2,\cdots$

$$\Rightarrow \frac{\|Tu_n\|}{\|u_n\|} = n \to \infty$$

Def : $\mathcal{L}(X,Y) \overset{\text{def}}{=} \{X$ 到 $Y$ 的有界线性算子$\}$

$\mathcal{L}(X) \overset{\text{def}}{=} \mathcal{L}(X,X)$

$X^* \overset{\text{def}}{=} \mathcal{L}(X,\mathbb{K}) = \{X$ 上连续线性泛函$\}$

对 $T \in \mathcal{L}(X,Y)$

$$\|T\|_{X\to Y} \overset{\text{def}}{=} \sup_{\substack{x\in X \\ x\neq 0}} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\substack{x\in X \\ \|x\|=1}} \|Tx\|_Y$$

称为 $T$ 的算子范数.

例: $H$ — Hilbert 空间

$M$ — 闭子空间

$P_M$ — $H$ 到 $M$ 的正交投影

$\|P_M\| = 1$

Thm $(\mathcal{L}(X,Y), \|\cdot\|_{X\to Y})$ 是赋范空间

进而: 1° 如果 $Y$ 完备, 则 $\mathcal{L}(X,Y)$ 完备

2° $X^*$ 是 Banach 空间

Pf 设 $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathcal{L}(X,Y)$ 中 Cauchy 列

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists N$ s.t.

$$\|T_n - T_m\| < \varepsilon, \quad \forall n,m \geq N$$

$\Rightarrow \forall x \in X$

$$(*) \qquad \|T_n x - T_m x\| < \varepsilon \|x\|, \quad \forall n,m \geq N$$

$\Rightarrow \{T_n x\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $Y$ 中 Cauchy 列

$\overset{Y\text{完备}}{\Longrightarrow} \exists y \in Y$ s.t.

$$\|T_n x - y\| \to 0 \quad \text{as } n \to \infty$$

定义映射 $T: X \to Y$

$$x \mapsto y = \lim_{n\to\infty} T_n x$$

1° 线性

2° 有界

在 (*) 中令 $m \to \infty$

$\Rightarrow$

(**) $\|T_n x - Tx\| \leq \varepsilon \|x\|, \quad \forall x \in X, \quad \forall n \geq N$

$\Rightarrow \quad \|Tx\| \leq (\|T_N\| + \varepsilon)\|x\|, \quad \forall x \in X$

$\Rightarrow \quad T \in \mathcal{L}(X, Y)$

3° $\|T_n - T\| \longrightarrow 0$ as $n \to \infty$

(**) $\Rightarrow \quad \sup\limits_{\substack{x\in X \\ x\neq 0}} \dfrac{\|T_n x - Tx\|}{\|x\|} \leq \varepsilon, \quad \forall n \geq N$

Riesz 表示定理.

$H$ — Hilbert 空间

设 $y \in H$. 定义 $f_y : H \to \mathbb{K}$ by

$$f_y(x) \overset{def}{=} \langle x, y \rangle, \quad x \in H$$

$\overset{C-S}{\Longrightarrow} \quad |f_y(x)| \leq \|y\| \|x\|, \quad \forall x \in H$

$\Rightarrow \quad f_y \in H^*$ 且 $\|f_y\| \leq \|y\|$

另一方面, $\|y\|^2 = |f_y(y)| \leq \|f_y\| \|y\|$

$\Rightarrow \quad \|y\| \leq \|f_y\|$

$\Rightarrow \quad \|f_y\| = \|y\|$

Q: 是否: $\forall f \in H^*$, $\exists\, y \in H$ s.t.

$$f(x) = \langle x, y \rangle, \quad x \in H.$$

<u>Thm</u> (Riesz 表示定理)

$H$ — Hilbert 空间

$\forall f \in H^*$, $\exists !\, y_f \in H$ s.t.

$$f(x) = \langle x, y_f \rangle, \quad x \in H.$$

<u>且</u> $\|y_f\| = \|f\|$.

<u>Pf</u> 如果 $f = 0$, 则 $y_f = 0$

下设 $f \neq 0$

$\Rightarrow$ $\ker(f) \neq H$ 且是闭子空间 ($\because$ $f$ 连续)

$\Rightarrow$ $\exists\, y_0 \in \ker(f)^{\perp}$ with $\|y_0\| = 1$

$\forall x \in H$

$$f\left(x - \frac{f(x)}{f(y_0)} y_0\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x - \frac{f(x)}{f(y_0)} y_0 \in \ker(f)$$

$$\overset{y_0 \in \ker(f)^{\perp}}{\Longrightarrow} \quad \left\langle x - \frac{f(x)}{f(y_0)} y_0,\ y_0 \right\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \quad \langle x, y_0 \rangle - \frac{f(x)}{f(y_0)} \|y_0\|^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = \langle x, \underbrace{\overline{f(y_0)}\, y_0}_{y_f} \rangle$$