# 第十一讲

**Thm** $H$ — Hilbert空间

可分 $\Longleftrightarrow$ 有可数的 O.N.B.

例.（不可分 Hilbert 空间）

$\mu$ — $\mathbb{R}$ 上计数测度

$$L^2(\mathbb{R},\mu) \overset{\text{def}}{=} \left\{ f:\mathbb{R}\to\mathbb{C} : f \text{ 在至多可数个点非零, 且 } \sum_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|^2 < \infty \right\}$$

$$\langle f, g\rangle \overset{\text{def}}{=} \sum_{t\in\mathbb{R}} f(t)\overline{g(t)}$$

$$e_r(t) = \begin{cases} 1, & t=r \\ 0, & t\neq r \end{cases}$$

$\{e_r\}_{r\in\mathbb{R}}$ 是 $L^2(\mathbb{R},\mu)$ 的 O.N.B.

Q: 分类可分 Hilbert 空间

**Def** $(X_1, \langle\cdot,\cdot\rangle_1)$, $(X_2, \langle\cdot,\cdot\rangle_2)$

如果存在线性同构 $T: X_1 \to X_2$ s.t.

$$\langle Tx, Ty\rangle_2 = \langle x, y\rangle_1, \quad \forall x, y\in X_1$$

则称 $X_1$ 与 $X_2$ 作为内积空间同构. 记为 $X_1 \simeq X_2$

**Thm** (i) $n$ 维 Hilbert 空间 $\simeq \mathbb{K}^n$

(ii) 无穷维可分 Hilbert 空间 $\simeq \ell^2$

**Pf** (ii) 设 $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ 为 $H$ 的 O.N.B.

定义 $T: H \longrightarrow \ell^2$

$$x \longmapsto \{\langle x, e_n\rangle\}_{n=1}^\infty$$

1° 线性.

2° 等距

$$\|Tx\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k\rangle|^2\right)^{1/2} \overset{\text{P.I.}}{=} \|x\|$$

3° 单射 (by 2°)

4° 满射

$\forall\ a \in \ell^2$

$$\left\| \sum_{k=n}^{m} a_k e_k \right\|^2 = \sum_{k=n}^{m} |a_k|^2 \to 0 \quad \text{as } n, m \to \infty$$

$\Rightarrow \exists\ x \in H$ s.t.

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} a_k e_k - x \right\| \to 0 \quad \text{as } n \to \infty$$

i.e. $x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k$ with

$$\langle x, e_k\rangle = a_k, \quad k = 1, 2, \cdots$$

$\Rightarrow Tx = a$

5° $\langle Tx, Ty\rangle_2 = \langle x, y\rangle$

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle &= \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle e_n, \sum_{m=1}^{\infty} \langle y, e_m\rangle e_m \right\rangle \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle \overline{\langle y, e_m\rangle} \langle e_n, e_m\rangle \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle \overline{\langle y, e_n\rangle} \\ &= \langle Tx, Ty\rangle_2\end{aligned}$$

例: 单位圆周 $\mathbb{T} \overset{\text{def}}{=} \{ z \in \mathbb{C} : |z| = 1 \}$

对 $\mathbb{T}$ 上函数 F，令

$$f(t) \overset{\text{def}}{=} F(e^{2\pi i t}) \qquad t \in \mathbb{R}.$$

$\Rightarrow$ $f$ 是 $\mathbb{R}$ 上周期为 1 的周期函数

$$F \leftrightarrow f, \quad \mathbb{T} \longleftrightarrow [-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})$$

令

$$e_k(t) \overset{\text{def}}{=} e^{2\pi i k t}, \quad t \in [-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

$\Rightarrow$ $\{e_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ 是 $L^2(\mathbb{T})$ 中 O.N.S.，称三角函数系

对 $f \in L^2(\mathbb{T})$,

$$\hat{f}(k) \overset{\text{def}}{=} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t) e^{-2\pi i k t} \, dt = \langle f, e_k \rangle$$

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{2\pi i k x} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, e_k \rangle e_k$$

Q: $f$ 的 Fourier 级数是否收敛于 $f$ ?

逐点收敛？

a.e. 收敛？ Carleson, 1965.

依 $L^2$ 范数收敛（平方平均收敛）

Thm $\forall f \in L^2(\mathbb{T})$

$$\| S_N f - f \|_2 \to 0 \quad \text{as} \quad N \to \infty$$

where

$$S_N f(x) = \sum_{k=-N}^{N} \hat{f}(k) e^{2\pi i k x}$$

<u>Idea of Pf</u>

Thm $\Leftrightarrow$ $\{e_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ 是 $L^2(\mathbb{T})$ 的 O.N.B.

$\Leftrightarrow$ $(\{e_k\}_{k \in \mathbb{Z}})^{\perp} = \{0\}$ （即 Ex. 1.6.7）

$\overset{\text{Ex.1.6.5}}{\Leftrightarrow}$ $\overline{\operatorname{span}\{e_k\}_{k \in \mathbb{Z}}} = L^2(\mathbb{T})$

从而简化为：

$\forall f \in L^2(\mathbb{T})$ 可由三角多项式依 $L^2$ 范数逼近

Pf $\quad S_N f(x) = (f * D_N)(x)$

with Dirichlet kernel

$$D_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} e^{2\pi i k t} = \frac{\sin[(2N+1)\pi t]}{\sin(\pi t)}$$

Rmk: $D_N(t)$ 不是 Good kernel $\left( \|D_N\|_1 \to \infty \quad \text{as } N \to \infty \right)$

令

$$\sigma_N f = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N} S_N f$$

$$= f * \left( \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N} D_k \right) = f * F_N$$

with Fejer kernel

$$F_N(t) = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N} D_k(t) = \frac{1}{N+1} \frac{\sin^2[(N+1)\pi t]}{\sin^2(\pi t)}$$

Lem (i) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} F_N(t)\, dt = 1$

(ii) $\forall \delta > 0$

$$\lim_{N\to\infty} \int_{\delta < |t| < \frac{1}{2}} F_N(t)\, dt = 0$$

Pf 当 $\delta < |t| < \frac{1}{2}$ 时

$$0 \leq F_N(t) \leq \frac{1}{N+1} \frac{1}{\sin^2(\pi\delta)}$$

Lem (Minkowski 积分不等式)

设 $1 \leq p \leq \infty$.

$$\left\| \int_Y f(\cdot, y)\, dy \right\|_p \leq \int_Y \|f(\cdot, y)\|_p\, dy$$

即 $$\left\{ \int_X \left| \int_Y f(x,y)\,dy \right|^p dx \right\}^{1/p} \leqslant \int_Y \left\{ \int_X |f(x,y)|^p dx \right\}^{1/p} dy$$

**Thm** $\forall f \in L^2(\mathbb{T})$

$$\| \sigma_N f - f \|_2 \to 0 \quad \text{as} \quad N \to \infty$$

**Pf**

$$\| \sigma_N f - f \|_2$$

$$= \left\{ \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left| \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} [f(x-t) - f(x)]\, F_N(t)\,dt \right|^2 dx \right\}^{1/2}$$

$$\overset{\text{Minkowski}}{\leqslant} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left| [f(x-t) - f(x)]\, F_N(t) \right|^2 dx \right\}^{1/2} dt$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \| f(\cdot - t) - f(\cdot) \|_2\, F_N(t)\,dt$$

$$= \underbrace{\int_{|t| \leqslant \delta}}_{<\varepsilon/2} + \underbrace{\int_{\delta < |t| < 1/2} \| f(\cdot - t) - f(\cdot) \|_2\, F_N(t)\,dt}_{\leqslant 2\|f\|_2 \int_{\delta<|t|<1/2} F_N(t)\,dt}$$

$< \varepsilon/2$, 当 $\delta$ 充分小（由积分的绝对连续性）

$\leqslant 2\|f\|_2 \int_{\delta<|t|<1/2} F_N(t)\,dt < \varepsilon/2$, 当 $N$ 充分大

$< \varepsilon$, 当 $N$ 充分大

**Rmk** $$\sigma_N f(x) = \sum_{k=-N}^{N} \left(1 - \frac{|k|}{N}\right) \hat{f}(k)\, e^{2\pi i k x} \in \operatorname{span}\{e_k\}_{k=-N}^{N}$$

由 Thm $\Longrightarrow$ $$\overline{\operatorname{span}\{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}}} = L^2(\mathbb{T})$$

Idea of Pf

$\Longleftrightarrow$ $\{e_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ is $L^2(\mathbb{T})$ an O.N.B.

$\Longleftrightarrow$ $\| S_N f - f \|_2 \to 0$ as $N \to \infty$