# 第九讲 (2024.9.30)

**Lem** $H$ — Hilbert 空间

$\phi \neq M$ — 闭凸集


$\forall x \in H,\ \exists!\ y \in M$ s.t. $\|x-y\| = \mathrm{dist}(x, M)$.

(最近点)

**Pf** 令

$$d \overset{\text{def}}{=} \mathrm{dist}(x, M) = \inf_{z \in M} \|x - z\|$$

$\Rightarrow \exists\, y_n \in M$, $n = 1, 2, \cdots$ s.t.

$$\|y_n - x\| \to d \qquad (\text{极小化序列})$$

**Claim** $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛

$$\|(y_m - x) + (y_n - x)\|^2 + \|(y_m - x) - (y_n - x)\|^2$$

$$= 2\left(\|y_m - x\|^2 + \|y_n - x\|^2\right)$$

$$\Rightarrow \quad \|y_m - y_n\|^2 = 2\left(\|y_m - x\|^2 + \|y_n - x\|^2\right) - 4\underbrace{\left\|\frac{y_m + y_n}{2} - x\right\|^2}_{\geq d^2}$$

$$\leq 2\left(\|y_m - x\|^2 + \|y_n - x\|^2\right) - 4d^2$$

$$\to 0 \quad \text{as } m, n \to \infty$$

$\overset{H\text{完备}}{\Longrightarrow} \quad \exists\, y \in H$ s.t. $\|y_n - y\| \to 0$

$\overset{M\text{闭}}{\Longrightarrow} \quad y \in M$

$$\Rightarrow \quad d \leq \|x - y\| \leq \|x - y_n\| + \|y_n - y\| \to d$$

$$\Rightarrow \quad \|x - y\| = d$$

唯一性 假设 $y' \in M$ s.t. $\|x - y'\| = d$

$$\overset{P.L.}{\Longrightarrow} \quad \|y - y'\|^2 = 2(\|y - x\|^2 + \|y' - x\|^2) - 4\left\|\frac{y+y'}{2} - x\right\|^2$$

$$\leq 4d^2 - 4d^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad y' = y$$

Thm（正交分解）

$H$ — Hilbert 空间

$M \overset{闭子空间}{\hookrightarrow} H$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{H = M \oplus M^{\perp}}_{}$$

$\forall x \in H$，$\exists!\, y \in M$，$\exists!\, z \in M^{\perp}$ s.t. $x = y + z$

Pf $\forall x \in H$，$\exists!\, y \in M$（最近点）s.t.

$$\|x - y\| = \mathrm{dist}(x, M) = d$$

Claim $x - y \in M^{\perp}$

$\forall\, 0 \neq w \in M$，$\forall \lambda \in \mathbb{K}$，

$$y + \lambda w \in M$$

$$\Rightarrow \quad d^2 \leq \|x - (y + \lambda w)\|^2$$

$$= \|x - y\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\{\bar{\lambda}\langle x - y, w\rangle\} + |\lambda|^2\|w\|^2$$

取 $\lambda = \dfrac{\langle x - y, w\rangle}{\|w\|^2}$

$$\Rightarrow \quad d^2 = d^2 - \frac{|\langle x-y, w\rangle|^2}{\|w\|^2}$$

$$\Rightarrow \quad \langle x-y, w\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \quad x-y \perp M$$

**Def** $H$ — Hilbert空间

$M \xhookrightarrow{\text{闭子空间}} H$

映射 $P_M: H \to M$

$x \mapsto y$ （最近点）

称为 $H$ 到 $M$ 的正交投影.

**Thm** (i) $P_M x \in M$, $x - P_M x \in M^\perp$

(ii) $\mathrm{Ran}(P_M) = M$, $\mathrm{Ker}(P_M) = M^\perp$

(iii) $\|x - P_M x\| = \mathrm{dist}(x, M)$

(iv) $P_M^2 = P_M$ （幂等性）

(v) $\|P_M x\| \leq \|x\|$, $\forall x \in H$.

(vi) $I - P_M = P_{M^\perp}$

**Def** 如果 $S = \{e_\alpha\}_{\alpha \in I} \subset X$ 满足

$$e_\alpha \perp e_\beta, \quad \forall \alpha, \beta \in I, \ \alpha \neq \beta$$

则称 $S$ 为 $X$ 中正交集. 如果 $S$ 还满足 $\|e_\alpha\| = 1$, $\forall \alpha$

则称之为规范正交集 ( O.N.S. )

**Def** 如果一个正交集 $S$ 满足 $S^\perp = \{0\}$, 则称 $S$ 完备

**Thm** 非平凡内积空间中一定有完备正交集

**Def** $X \neq \phi$

$X$ 上一个偏序"$\leq$"是满足以下条件的一个关系：

(i) (传递性) $x \leq y,\ y \leq z \Rightarrow x \leq z$

(ii) (反身性) $x \leq x$

(iii) $x \leq y,\ y \leq x \Rightarrow x = y$

$(X, \leq)$ 称为偏序集

1° 如果 $\forall x, y \in X$，$x \leq y$ 和 $y \leq x$ 二者必居其一，则称 $\leq$ 是 $X$ 上全序

2° 对 $Y \subset X$，如果 $\exists p \in X$ s.t.

$$y \leq p,\quad \forall y \in Y$$

则称 $p$ 是 $Y$ 的一个上界.

3° 如果 $\exists m \in X$ s.t.

$$m \leq x \Rightarrow x = m$$

则称 $m$ 是 $X$ 的一个极大元.

**Zorn lem** $(X, \leq)$

如果 $X$ 的每个全序子集都有上界，则 $X$ 必有极大元.

**Pf of Thm**

令 $\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \{X \text{ 中正交集}\}$

$\Rightarrow (\mathcal{F}, \subset)$ 是偏序集

对 $\mathcal{F}$ 的任一全序子集 $\mathcal{C}$，令

$$P \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{A\in\mathcal{C}} A$$

$\Rightarrow$ $P$ 是 $\mathcal{C}$ 的上界.

$\overset{\text{Zorn lem}}{\Longrightarrow}$ $\mathcal{F}$ 有极大元 $S$

<u>Claim</u> $S$ 完备

否则 $\exists\ x_0 \neq 0$ s.t. $x_0 \perp S$

$\Rightarrow$ $S \cup \{x_0\} \in \mathcal{F}$

与 $S$ 的极大性矛盾.

<u>Def</u> $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$

$S = \{e_\alpha\}_{\alpha\in I}$ — O.N.S.

如果 $\forall\, x\in X$ 均可表为

$$x = \sum_{\alpha\in I} \langle x, e_\alpha\rangle e_\alpha \qquad (\text{形式和!})$$

则 $S$ 称为 $X$ 上一个规范正交基 (O.N.B.)

$\{\underbrace{\langle x, e_\alpha\rangle}\}_{\alpha\in I}$ 称为 $x$ 的 Fourier 系数.

至多只有可数个非零.

<u>Thm</u> (Bessel 不等式)

$\{e_\alpha\}_{\alpha\in I}$ — O.N.S.

$\forall\, x\in X$,

$$\sum_{\alpha\in I} |\langle x, e_\alpha\rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

Pf  Step 1  $\forall \{\alpha_1, \cdots, \alpha_N\} \in I$, $\sum_{k=1}^{N} |\langle x, e_{\alpha_k}\rangle|^2 \leq \|x\|^2$

$$0 \leq \left\langle x - \sum_{k=1}^{N} \langle x, e_{\alpha_k}\rangle e_{\alpha_k},\ x - \sum_{j=1}^{N} \langle x, e_{\alpha_j}\rangle e_{\alpha_j} \right\rangle$$

$$= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{N} \langle x, e_{\alpha_k}\rangle \langle e_{\alpha_k}, x\rangle$$

$$- \sum_{j=1}^{N} \overline{\langle x, e_{\alpha_j}\rangle} \langle x, e_{\alpha_j}\rangle$$

$$+ \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \langle x, e_{\alpha_k}\rangle \overline{\langle x, e_{\alpha_j}\rangle} \underbrace{\langle e_{\alpha_k}, e_{\alpha_j}\rangle}_{\delta_{kj}}$$

$$= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{N} |\langle x, e_{\alpha_k}\rangle|^2$$

Step 2  $\tilde{I} \overset{\text{def}}{=} \{\alpha \in I : \langle x, e_\alpha\rangle \neq 0\}$ 至多可数.

令

$$I_n \overset{\text{def}}{=} \left\{ \alpha \in I : |\langle x, e_\alpha\rangle| > \frac{1}{n} \right\}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

Claim  $\forall n$, $\# I_n < \infty$.

否则 $\exists\, n_0$ s.t. $\# I_{n_0} = \infty$

取 $N$ 充分大 s.t.

$$\frac{N}{n_0^2} > \|x\|^2.$$

任取 $\alpha_1, \cdots, \alpha_N \in I_{n_0}$

$$\sum_{k=1}^{N} |\langle x, e_{\alpha_k}\rangle|^2 > N \cdot \frac{1}{n_0^2} > \|x\|^2$$

与 Step 1 矛盾

Step 3  给 $\tilde{I}$ 一个排列, $\tilde{I} = \{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$

$\forall N.$

$$\sum_{k=1}^{N} |\langle x, e_{\alpha_k}\rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_{\alpha_k}\rangle|^2}_{\text{def}\ \|} \leq \|x\|^2$$

$$\sum_{\alpha \in I} |\langle x, e_\alpha\rangle|^2$$

Rmk. 以上求和与 $\tilde{I}$ 的排列无关. $\sum_{\alpha\in I}\langle x, e_\alpha\rangle e_\alpha$ 如何?

HW: Ex. 1.6.5 – 1.6.7. 1.6.9. 1.6.10