第八讲（2024.9.25）

商空间

$(X, \|\cdot\|)$

$X_0 \overset{\text{闭子空间}}{\hookrightarrow} X$

在 X 中定义

$$x \sim y \overset{\text{def}}{\iff} x - y \in X_0$$

$[x] \overset{\text{def}}{=} x$ 所在等价类（包含 x 的陪集）

$$X/X_0 \overset{\text{def}}{=} \{ [x] : x \in X \}$$

定义

$$[x] + [y] \overset{\text{def}}{=} [x+y]$$
$$\lambda [x] \overset{\text{def}}{=} [\lambda x]$$

$\Rightarrow$ X/X_0 是向量空间

称为 $X \bmod X_0$ 的商空间（作为向量空间）

Q: 1° 如何赋范？

2° 为什么要求 X_0 闭？

定义 $\quad \|[x]\|_* \overset{\text{def}}{=} \inf\limits_{y \in [x]} \|y\|$

Thm 1° $\|\cdot\|_*$ 是 X/X_0 上范数

2° $(X, \|\cdot\|)$ Banach $\Rightarrow$ $(X/X_0, \|\cdot\|_*)$ Banach

Pf 1° (i)（正定性） $\|[x]\|_* \geq 0$ 平凡

$\|[x]\|_* = 0 \Rightarrow \exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [x]$ s.t.

$\|x_n\| \to 0$

$$\Rightarrow \quad x_n \to 0$$

$$\Rightarrow \quad 0 \in [x] \qquad \left(\because \ \text{作为集合 } [x] = \underbrace{x + X_0}_{\text{闭}} \right.$$

$$\Rightarrow \quad [x] = \underbrace{0}_{X/X_0 \text{ 中零向量，即 } X_0}$$

(ii)（齐次性） 平凡

(iii)（三角不等式）

$\forall \varepsilon > 0$， $\exists\, x' \in [x]$ ， $y' \in [y]$ s.t.

$$\|x'\| \le \|[x]\|_* + \varepsilon/2$$

$$\|y'\| \le \|[y]\|_* + \varepsilon/2$$

$$\Rightarrow \quad \|x' + y'\| \le \|x'\| + \|y'\|$$

$$\le \|[x]\|_* + \|[y]\|_* + \varepsilon$$

$x' + y' \in [x+y]$

$$\Rightarrow \quad \|[x+y]\|_* \le \|[x]\|_* + \|[y]\|_* + \varepsilon$$

2° 设 $\{[x_n]\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X/X_0 中 Cauchy 列

$$\Rightarrow \quad \|[x_n] - [x_m]\|_* \to 0 \quad \text{as } n, m \to \infty$$

只需证某个子列收敛

$\forall k$， $\exists\, n_k$ s.t.

$$\|[x_{n_k}] - [x_m]\|_* < \frac{1}{2^{k+1}}, \quad \forall m > n_k$$

$\Rightarrow$ 子列 $\{[x_{n_k}]\}_{k=1}^{\infty}$ s.t.

$$\|[x_{n_k}] - [x_{n_{k+1}}]\|_* < \frac{1}{2^{k+1}}, \quad \forall k$$

由 $\|\cdot\|_*$ 的定义，$\exists\, y_{n_k} \in [x_{n_k} - x_{n_{k+1}}]$ s.t.

$$\|y_{n_k}\| \le \|[x_{n_k} - x_{n_{k+1}}]\|_* + \frac{1}{2^{k+1}} < \frac{1}{2^k}$$

令

$$z_1 \overset{\text{def}}{=} x_{n_1}$$
$$z_2 \overset{\text{def}}{=} z_1 - y_{n_1}$$
$$\vdots$$
$$z_k \overset{\text{def}}{=} z_{k-1} - y_{n_{k-1}}$$

$$\Rightarrow \quad z_k = x_{n_1} - y_{n_1} - \cdots - y_{n_{k-1}} \in [x_{n_k}]$$

且

$$\begin{aligned}\|z_k - z_{k+p}\| &\le \|z_k - z_{k+1}\| + \cdots + \|z_{k+p-1} - z_{k+p}\| \\ &= \|y_{n_k}\| + \cdots + \|y_{n_{k+p-1}}\| \\ &\le \frac{1}{2^k} + \cdots + \frac{1}{2^{k+p-1}} \\ &< \frac{1}{2^{k-1}}\end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad \{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 X 中 Cauchy 列

$\Rightarrow \quad \exists\, z \in X$ s.t.

$$\|z_k - z\| \to 0$$

$$\Rightarrow \quad \|[x_{n_k}] - [z]\|_* = \|[z_k] - [z]\|_* \le \|z_k - z\| \to 0$$

HW: 1.4.17

内积空间

实欧氏空间 $\mathbb{R}^n$

$$x \cdot y \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

复欧氏空间（酉空间） $\mathbb{C}^n$

$$\langle z, w\rangle \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n} z_k \overline{w_k}$$

Def X —— $\mathbb{K}$上向量空间

如果函数 $\langle\cdot,\cdot\rangle : X\times X \to \mathbb{K}$ 满足

(i)（对第一变元线性） $\forall x_1, x_2, y \in X.\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$,

$$\langle \alpha x_1 + \beta x_2, y\rangle = \alpha\langle x_1, y\rangle + \beta\langle x_2, y\rangle.$$

(ii)（对第二变元共轭线性） $\forall x, y_1, y_2 \in X.\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$

$$\langle x, \alpha y_1 + \beta y_2\rangle = \bar{\alpha}\langle x, y_1\rangle + \bar{\beta}\langle x, y_2\rangle$$

(iii)（共轭对称） $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$, $\forall x, y \in X$

(iv)（二次型正定）

$$\langle x, x\rangle \geq 0,\quad \forall x \in X$$

$$\langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0$$

则称 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是 X 上一个内积

$(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 称为内积空间

Lem (Cauchy-Schwarz)

$(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$

$$\|x\| \overset{\text{def}}{=} \langle x, x\rangle^{1/2},\quad x \in X$$

则 $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|$, $\forall x, y \in X$

等号成立 $\iff$ $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ s.t. $x = \lambda y$

Pf 不妨设：$y \neq 0$

$\forall \lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle x+\lambda y, x+\lambda y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + \lambda \langle y, x \rangle + \bar{\lambda} \langle x, y \rangle + \lambda \bar{\lambda} \langle y, y \rangle \\ &= \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}\{\bar{\lambda}\langle x, y \rangle\} + |\lambda|^2 \|y\|^2 \end{aligned}$$

取 $\lambda = -\dfrac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2}$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad 0 &\leq \|x\|^2 - 2 \cancel{\operatorname{Re}} \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^2} + \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^4} \cdot \|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^2} \end{aligned}$$

Prop $\|x\| \stackrel{\text{def}}{=} \langle x, x \rangle^{1/2}$ 是 X 上一个范数，称为内积诱导范数.

Pf
$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \end{aligned}$$

Def 如果一个内积空间在其内积诱导范数下是 Banach 空间，则称之为 Hilbert 空间.

例：l^2

$$\langle x, y \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}$$

Thm $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$

$$\|x\| \stackrel{\text{def}}{=} \langle x, x \rangle^{1/2}$$

1° (极化恒等式)

(i) 如果 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} \left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 \right)$$

(ii) 如果 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} i^k \|x + i^k y\|^2$$

2° (平行四边形等式)

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2 \left(\|x\|^2 + \|y\|^2 \right)$$

Pf HW.

Thm (Fréchet - von Neumann)

$(X, \|\cdot\|)$

$\|\cdot\|$ 可由内积给出 $\Longleftrightarrow$ $\|\cdot\|$ 满足平行四边形等式

Pf HW

Def $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$

如果 $\langle x, y \rangle = 0$, 则称 x 与 y 正交, 记为 $x \perp y$.

对 $M \subset X$. 如果 $x \perp y$, $\forall y \in M$, 记 $x \perp M$

$M^{\perp} \overset{\text{def}}{=} \{ x \in X : x \perp M \}$ 称为 M 的正交补.

Prop (勾股定理)

$$x \perp y \Rightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Prop

$$\left.\begin{array}{l} M \overset{\text{dense}}{\subset} X \\ x \perp M \end{array}\right\} \Rightarrow x = 0$$

Pf $\forall y \in X$, $\exists y_n \in M$, $n = 1, 2, \cdots$ s.t. $y_n \to y$

$\Rightarrow \quad 0 = \langle x, y_n \rangle \longrightarrow \langle x, y \rangle$

$\Rightarrow \quad x \perp y$

$\Rightarrow \quad x = 0$

Prop $\quad x \perp M \Rightarrow x \perp \operatorname{span} M$

Prop $\quad M^\perp$ 是闭子空间

Pf 易见 $M^\perp$ 是子空间

设 $M^\perp \ni x_n \to x$

$\forall y \in M, \quad 0 = \langle x_n, y \rangle \to \langle x, y \rangle$

$\Rightarrow \quad \langle x, y \rangle = 0$

$\Rightarrow \quad x \in M^\perp$