第七讲 (2024.9.23)

Thm $(X, \|\cdot\|)$

X 中单位球面列紧 $\Leftrightarrow$ $\dim X < \infty$

($\Rightarrow$ 无穷维赋范空间中单位球面一定不列紧)

Pf of "$\Leftarrow$"

(为什么不能直接由 B-W 得到?)

代数同构 $T: X \to \mathbb{K}^n$

$$x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k \mapsto \xi$$

s.t.

$$\underbrace{C_1 |Tx| \leq \|x\|}\leq C_2 |Tx|$$

$\Rightarrow$ $T(S_1) \subset \mathbb{K}^n$ 有界, 故列紧

$\Rightarrow$ $\forall \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset S_1$

$\exists\ Tx_{k_j} \to \xi \in \mathbb{K}^n$

$\Rightarrow$ $x_{k_j} \to T^{-1}\xi \in X$

Rmk: 由同样的证明可知 X 中任一有界集列紧

Lem (Riesz lem)

$(X, \|\cdot\|)$

$Y \overset{\text{闭子空间}}{\subset} X$ 且 $Y \neq X$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists\ e \in X$ with $\|e\| = 1$ s.t.

$$\operatorname{dist}(e, Y) \geq 1 - \varepsilon$$

Pf $\quad Y \neq X \Rightarrow \exists\, x \in X \setminus Y$

令 $\quad d \overset{\text{def}}{=} \operatorname{dist}(x, Y) = \inf\limits_{y \in Y} \|x - y\|$

$\overset{Y\text{闭}}{\Longrightarrow} \quad d > 0.$ $\quad \left(\begin{array}{l} \exists\, y_n \in Y,\ n = 1, 2, \cdots \ \text{s.t.}\ \|x - y_n\| \to d \\ \text{如果 } d = 0 \Rightarrow y_n \to x \overset{Y\text{闭}}{\Longrightarrow} x \in Y \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{矛盾} \end{array} \right)$

$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, y_0 \in Y$ s.t.

$$d \leq \|x - y_0\| < \frac{d}{1 - \varepsilon}$$

令 $\quad e \overset{\text{def}}{=} \dfrac{x - y_0}{\|x - y_0\|}$

$\Rightarrow \quad e \notin Y$ 且 $\|e\| = 1$

(否则 $x \in Y$)

$\forall\, z \in Y,$

$$\begin{aligned} \|e - z\| &= \left\| \frac{x - y_0}{\|x - y_0\|} - z \right\| \\ &= \frac{1}{\|x - y_0\|} \big\| x - \underbrace{(y_0 + \|x - y_0\| z)}_{\in Y} \big\| \\ &> \frac{1 - \varepsilon}{d} \times d \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad \operatorname{dist}(e, Y) \geq 1 - \varepsilon$

<u>Pf of "$\Rightarrow$" of Thm</u>

假设 $\dim X = \infty$

$\Rightarrow \exists\, \{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ 线性无关 (可取 Hamel 基的子集)

令 $X_n \overset{def}{=} \text{span}\{e_1, \cdots, e_n\}$

$\Longrightarrow X_{n-1} \overset{闭子空间}{\subset} X_n \quad (\because \dim X_{n-1} < \infty)$

$\overset{\text{Riesz lem}}{\Longrightarrow} \forall n, \exists x_n \in X_n$ with $\|x_n\| = 1$ s.t.

$$\text{dist}(x_n, X_{n-1}) \geq \frac{1}{2}$$

$\Longrightarrow \|x_n - x_m\| \geq \frac{1}{2}, \quad \forall n \neq m$

$\Longrightarrow \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 没有收敛子列，与 S_1 列紧矛盾.

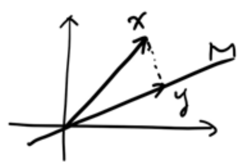
最佳逼近元

逼近论中基本问题：给定一个函数，用一组给定函数的线性组合去逼近，求最佳逼近元.

$\overset{抽象}{\longrightarrow}$ Given $x \in X$, $e_1, \cdots, e_n \in X$ (不妨设线性无关)

是否 $\exists \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, s.t.

$$\|x - \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k}_{最佳逼近元}\| = \min_{\xi \in \mathbb{K}^n} \|x - \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k\| \ ?$$



$\Longleftrightarrow$ 令 $M \overset{def}{=} \text{span}\{e_1, \cdots, e_n\}$

是否 $\forall x \in X, \exists y \in M$ s.t.

$$\|x - y\| = \text{dist}(x, M) \ ?$$

Thm $(X, \|\cdot\|)$

$e_1, \cdots, e_n \in X$ 线性无关

$\forall x \in X$, $\exists \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ s.t.

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \right\| = \min_{\xi \in \mathbb{K}^n} \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k \right\| .$$

Pf 给定 $x \in X$，定义

$$f: \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$$
$$\xi \mapsto \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k \right\|$$

1° f 连续

2° $f(\xi) \geq \left\| \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k \right\| - \|x\|$

3° $p(\xi) \overset{\text{def}}{=} \left\| \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k \right\|$ 是 $\mathbb{K}^n$ 上一个范数.

$\Rightarrow$ $\exists\, C > 0$ s.t.

$$p(\xi) \geq C|\xi| , \quad \forall \xi \in \mathbb{K}^n$$

$\Rightarrow$ $f(\xi) \geq C|\xi| - \|x\| \longrightarrow +\infty$ as $|\xi| \to \infty$

$\Rightarrow$ f 在 $\mathbb{K}^n$ 上可取到最小值.

Q: 1° 有限维子空间换为闭子空间是否仍成立？

反例：Ex 1.4.14. (HW)

2° 唯一性？

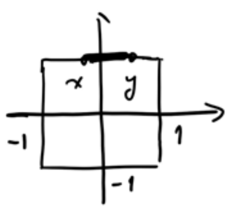
Def: 称 $(X, \|\cdot\|)$ 严格凸是指：

$\forall x, y \in X$, $\|x\| = \|y\| = 1$, $x \neq y$,

$\Rightarrow$ $\|tx + (1-t)y\| < 1$. $\forall t \in (0,1)$

例：$(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ 严格凸

$(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ 非严格凸.



例：当 $1<p<\infty$ 时，L^p 严格凸

$\forall\, u, v \in L^p$，$u \neq v$，$\|u\|_p = \|v\|_p = 1$

假设 $\|tu + (1-t)v\|_p = 1 = t\|u\|_p + (1-t)\|v\|_p$

Minkowski不等式
等号成立条件
$\Longleftrightarrow$ $\exists\, \lambda_1, \lambda_2 \geq 0$，$(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$ s.t.

$$\lambda_1 (tu) = \lambda_2 (1-t) v, \quad a.e.$$

$\Longrightarrow \|\lambda_1 t u\|_p = \|\lambda_2 (1-t) v\|_p$

$\Longrightarrow \lambda_1 t = \lambda_2 (1-t)$

$\Longrightarrow u = v$ a.e. 矛盾.

例：L^1，L^∞ 非严格凸.

$L^1[0,1]$ 中

$$u(t) \equiv 1. \quad v(t) = 2t$$

$\Longrightarrow \|u\|_1 = \|v\|_1 = 1$. $\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_1 = 1$.

$L^\infty[0,1]$ 中

$$u(t) \equiv 1. \quad v(t) = t$$

$$\|u\|_\infty = \|v\|_\infty = 1 = \left\|\frac{u+v}{2}\right\|_\infty$$

Thm 严格凸赋范空间中给定向量到有限维子空间的最佳逼近元唯一.

Pf 假设 $\exists\, y, z \in M$. $y \neq z$ s.t.

$$\|x-y\| = \|x-z\| = d = dist(x, M)$$

如果 $d=0$ 平凡（此时 $y=z=x$）

如果 $d>0$，则

$$\frac{1}{d}\|x-[ty+(1-t)z]\|$$

$$=\frac{1}{d}\|t(x-y)+(1-t)(x-z)\|$$

$$=\left\|t\,\frac{x-y}{d}+(1-t)\,\frac{x-z}{d}\right\|$$

$\xrightarrow{\text{严格凸}}\ <1$

$$\Longrightarrow\quad \|x-[\underbrace{ty+(1-t)z}_{\in M}]\|<d\text{.}\quad \text{矛盾}$$