第六讲（2024.9.18）

Def $\mathbb{K}$ — $\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$

X — $\mathbb{K}$上向量空间

如果函数 $\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}$ 满足

(i) 正定性

(ii) 齐次性

(iii) 三角不等式

则称 $\|\cdot\|$ 是 X 上一个范数．$(X, \|\cdot\|)$ 称为赋范向量空间 (normed vector space)

如果 $(X, \|\cdot\|)$ 在其诱导度量 $d(x,y) \overset{def}{=} \|x-y\|$ 下完备，则称之为 Banach 空间

例：函数空间

$L^p \quad (1 \le p < \infty)$

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p \right)^{1/p}$$

$L^\infty = \{$本性有界可测函数$\}$

$$\|f\|_\infty \overset{def}{=} \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |f(x)| = \inf\{M>0 : \mu\{|f|>M\} = 0\}$$

$C(M)$

数列空间

$\ell^p \quad (1 \le p < \infty)$

$$\|x\|_p \overset{def}{=} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p}$$

$\ell^\infty \overset{def}{=} \{$有界数列$\}$

$$\|x\|_\infty = \sup_k |x_k|$$

$c \overset{def}{=} \{$收敛数列$\}$

$c_0 \overset{def}{=} \{$收敛于 0 的数列$\}$

$c_0 \overset{闭子空间}{\subset} c \overset{闭子空间}{\subset} \ell^\infty$

作为集合 $\ell^1 \subset \ell^p \subset c_0 \subset c \subset \ell^\infty$

例：$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 有界域

$C^k(\overline{\Omega}) \overset{def}{=}$ $\overline{\Omega}$上 k 次连续可微的函数全体

$$\|u\| \overset{def}{=} \max_{|\alpha|\le k} \max_{x\in\overline{\Omega}} |\partial^\alpha u(x)|$$

$$\partial^\alpha \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}, \qquad |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$$

$(C^k(\bar{\Omega}), \|\cdot\|)$ 是 Banach 空间.

$$\|u\|_{k,p} \overset{\text{def}}{=} \left(\sum_{|\alpha|\le k} \int_\Omega |\partial^\alpha u|^p \right)^{1/p}, \qquad 1 \le p < \infty$$

$$S \overset{\text{def}}{=} \{ u \in C^k(\Omega) : \|u\|_{k,p} < \infty \}$$

$H^{k,p}(\Omega) \overset{\text{def}}{=} S$ 的完备化，称为 Sobolev 空间.

Def X — 向量空间

$\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ — X 上两个范数.

如果 $\forall \{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$

$\|x_n\|_2 \to 0$ implies $\|x_n\|_1 \to 0$

则称 $\|\cdot\|_2$ 强于 $\|\cdot\|_1$，记为 $\|\cdot\|_1 \lesssim \|\cdot\|_2$.

如果 $\|\cdot\|_1 \lesssim \|\cdot\|_2$，同时 $\|\cdot\|_2 \lesssim \|\cdot\|_1$，则称二者是等价范数.

Prop $\|\cdot\|_1 \lesssim \|\cdot\|_2 \iff \exists C > 0$ s.t.

$\|x\|_1 \le C\|x\|_2, \quad \forall x \in X$

Pf 1° "$\Leftarrow$"

平凡

2° "$\Rightarrow$"

假设不然 $\Rightarrow \forall n, \exists x_n \in X$ s.t. $\|x_n\|_1 \ge n\|x_n\|_2$

令 $y_n \overset{\text{def}}{=} \dfrac{x_n}{\|x_n\|_1}, \quad n = 1, 2, \cdots$

$$\Longrightarrow \quad \|y_n\|_2 = \frac{\|x_n\|_2}{\|x_n\|_1} \le \frac{1}{n} \to 0 \quad \text{as } n \to \infty$$

$\|\cdot\|_1 \lesssim \|\cdot\|_2$

$\Longrightarrow \quad \|y_n\|_1 \to 0$ ，与 $\|y_n\|_1 = 1$ ，$\forall n$ ，矛盾

Cor $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 等价 $\Longleftrightarrow$ $\exists\, C_1, C_2 > 0$ s.t.

$$C_1 \|x\|_1 \le \|x\|_2 \le C_2 \|x\|_1 \quad \forall x \in X$$

例. $\mathbb{R}^n$ 上 $\|\cdot\|_p$ $(1 \le p \le \infty)$ 彼此等价

$$\|x\|_\infty \le \|x\|_p \le n^{1/p} \|x\|_\infty$$

Thm 有限维空间上所有范数都等价.

Pf 设 $\dim X = n$

设 $\{e_1, \dots, e_n\}$ 是 X 的一个基.

$\Longrightarrow$ $\forall x \in X$ 有唯一表示

$$x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k, \quad \xi_k \in \mathbb{K}, \quad k = 1, \dots, n$$

定义映射 $T: X \longrightarrow \mathbb{K}^n$

$$x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k \longmapsto \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$$

$\Longrightarrow$ T 是 X 到 $\mathbb{K}^n$ 的代数同构.

令

$$|\xi| \overset{\text{def}}{=} \left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^2 \right)^{1/2}, \quad \xi \in \mathbb{K}^n$$

$$\|x\|_T \overset{\text{def}}{=} |Tx|, \quad x \in X$$

$\Longrightarrow$ $\|\cdot\|_T$ 是 X 上范数.

Claim X 上任一范数 $\|\cdot\|$ 与 $\|\cdot\|_T$ 等价.

定义 $\quad p : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$

$$\xi \longmapsto \left\| \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k \right\| \qquad (\text{这是 } \mathbb{K}^n \text{ 上一个范数})$$

1° $\quad p(\xi) = |\xi| \, p\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right), \quad \forall \xi \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$

2° $\quad p$ 在 $\mathbb{K}^n$ 上连续.

$$
\begin{aligned}
|p(\xi) - p(\eta)| &= \left| \left\| \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k \right\| - \left\| \sum_{k=1}^{n} \eta_k e_k \right\| \right| \\
&\le \left\| \sum_{k=1}^{n} (\xi_k - \eta_k) e_k \right\| \\
&\le \sum_{k=1}^{n} |\xi_k - \eta_k| \, \|e_k\| \\
&\le \left(\sum_{k=1}^{n} \|e_k\|^2 \right)^{1/2} |\xi - \eta|
\end{aligned}
$$

令 $\quad S_1 \overset{\text{def}}{=} \{ \xi \in \mathbb{K}^n : |\xi| = 1 \}$

$$C_1 \overset{\text{def}}{=} \min_{\xi \in S_1} p(\xi), \qquad C_2 \overset{\text{def}}{=} \max_{\xi \in S_1} p(\xi)$$

$$\Rightarrow \quad C_1 \le p\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) \le C_2, \quad \forall \xi \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}.$$

$$\Rightarrow \quad C_1 |\xi| \le p(\xi) \le C_2 |\xi|, \quad \forall \xi \in \mathbb{K}^n$$

$$\Rightarrow \quad C_1 \underbrace{|Tx|}_{\substack{\| \\ \|x\|_T}} \le \underbrace{p(Tx)}_{\substack{\| \\ \|x\|}} \le C_2 |Tx|, \quad \forall x \in X$$

$$\Leftrightarrow \quad C_1 \|x\|_T \le \|x\| \le C_2 \|x\|_T$$

只需证 $\quad C_1 > 0$

假设 $\quad C_1 = 0$

$$\Rightarrow \quad \exists \xi^* \in S_1 \quad \text{s.t.} \quad \underbrace{p(\xi^*)}_{\left\| \sum_{k=1}^{n} \xi^*_k e_k \right\|} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \xi_k^* e_k = 0$$

$$\Rightarrow \xi^* = 0$$ 与 $\xi^* \in S_1$ 矛盾.

Cor 同维数的有限维赋范空间彼此同构.

(Def: $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$
如果 $\exists\, T: X \to Y$, 线性, 双射, T 连续, T^{-1} 连续, 则称
X 与 Y 同构)

Pf $T: X \to \mathbb{K}^n$ 是代数同构

$x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k \mapsto \xi$

又

$$\underbrace{C_1 |Tx| \le \|x\|}_{T\text{ 连续}} \underbrace{\le C_2 |Tx|}_{T^{-1}\text{ 连续}}$$

Cor 有限维赋范空间一定是 Banach 空间

Pf $C_1 |Tx| \le \|x\| \le C_2 |Tx|$, $\forall x \in X$

设 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 X 中 Cauchy 列

$\Rightarrow$ $\{Tx_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 $\mathbb{K}^n$ 中 Cauchy 列, 收敛

设 $Tx_k \to \xi$

$\Rightarrow$ $\|x_k - T^{-1}\xi\| \le C_2 |Tx_k - \xi| \to 0$

有限维赋范空间的刻画

Thm $(X, \|\cdot\|)$

X 中单位球面列紧 $\Longleftrightarrow$ $\dim X < \infty$

($\Longrightarrow$ 无穷维赋范空间中单位球面一定不列紧)

Pf of " $\Leftarrow$ "

同构 $T: X \to \mathbb{K}^n$

$$x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k \mapsto \xi$$

$$C_1 |Tx| \leq \|x\| \leq C_2 |Tx| \,. \quad \forall x \in X$$

$|Tx| < \frac{1}{C_1}$
$\forall x \in S_1$ $\Longrightarrow$ $T(S_1) \subset \mathbb{K}^n$ 有界. 故列紧

$$\Longrightarrow \forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S_1 \,, \quad \exists\ T x_{n_k} \to \xi \in \mathbb{K}^n$$

$$\Longrightarrow x_{n_k} \to T^{-1}\xi \in X \,.$$

<u>HW</u>: Ex. 1.4.2 – 1.4.7