第8讲

(X, d) 中.

$$
\begin{tikzcd}
\text{有界闭} & \text{紧} \arrow[l, Rightarrow] \arrow[l, bend left, "X=\mathbb{R}^n\text{时}"] \arrow[r, Leftrightarrow] & \text{自列紧} \arrow[r, Rightarrow] & \text{列紧} \arrow[l, bend left, "+\text{闭}"] \arrow[r, Rightarrow] & \text{完全有界} \arrow[l, bend left, "X\text{完备时}"] \arrow[r, Rightarrow] & \text{有界} \arrow[l, bend left, "X=\mathbb{R}^n\text{时}"]
\end{tikzcd}
$$

Thm 列紧空间可分

Pf $\underbrace{\bigcup_{n=1}^{\infty} N_{1/n}}_{\text{可数}} \overset{\text{dense}}{\subset} X$

$\forall x \in X,\ \forall n,\ \exists\, x_n \in N_{1/n}$ s.t.

$d(x_n, x) < \frac{1}{n}$

(M, ρ) — 列紧空间

$C(M) \overset{\text{def}}{=}$ M上连续函数全体.

$d(f, g) \overset{\text{def}}{=} \max_{x \in M} |f(x) - g(x)|$

$\Rightarrow$ d 是 $C(M)$ 上度量

HW: $(C(M), d)$ 完备

Def 称 $C(M)$ 中一族函数 $\mathcal{F}$ 等度连续是指:

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$, s.t.

$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$, $\forall x', x'' \in M$ with $\rho(x', x'') < \delta$

$\forall f \in \mathcal{F}$

Thm (Arzela-Ascoli)

$\mathcal{F} \subset C(M)$ 列紧 $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}$ 作为函数族 $\begin{cases} \text{一致有界} \\ \text{等度连续} \end{cases}$

Pf 1° "$\Rightarrow$"

$\mathcal{F}$ 列紧 $\Rightarrow$ $\mathcal{F}$ 有界 $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}$ 作为函数族一致有界

$$\left(\underbrace{d(f, 0) \le R}_{\sup\limits_{x \in M} |f(x)| \le R.} , \ \forall f \in \mathcal{F} \right)$$

下证 $\mathcal{F}$ 等度连续

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_{\varepsilon/3} = \{f_1, \cdots, f_m\}$. s.t.

$$\mathcal{F} \subset \bigcup_{k=1}^{m} B(f_k, \tfrac{\varepsilon}{3})$$

对每个 k, $\exists \delta_k > 0$ s.t.

$$|f_k(x') - f_k(x'')| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall x', x'' \in M \text{ with } \rho(x', x'') < \delta_k$$

($\because$ f_k 一致连续)

令 $\delta \stackrel{\text{def}}{=} \min\limits_{1 \le k \le m} \delta_k$

$$\Rightarrow \quad |f_k(x') - f_k(x'')| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall x', x'' \in M \text{ with } \rho(x', x'') < \delta, \ \forall k \in \{1, \cdots, m\}$$

$$\mathcal{F} \subset \bigcup_{k=1}^{m} B(f_k, \tfrac{\varepsilon}{3})$$

$\Rightarrow$ $\forall f \in \mathcal{F}$, $\exists k \in \{1, \cdots, m\}$. s.t.

$$d(f, f_k) < \varepsilon/3$$

$$\Rightarrow \quad |f(x') - f(x'')|$$

$$\le \underbrace{|f(x') - f_k(x')|}_{\le d(f, f_k) < \varepsilon/3} + \underbrace{|f_k(x') - f_k(x'')|}_{\substack{< \varepsilon/3 \\ \text{if } \rho(x', x'') < \delta}} + \underbrace{|f_k(x'') - f(x'')|}_{\le d(f, f_k) < \varepsilon/3}$$

$$< \varepsilon \quad , \quad \text{whenever } \rho(x', x'') < \delta .$$

2° "$\Leftarrow$"

$\mathcal{F}$ 等度连续

$\Rightarrow \ \forall \varepsilon > 0 , \ \exists \delta > 0 \ \text{ s.t.}$

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{4} , \quad \forall x', x'' \in M \ \text{ with } \rho(x', x'') < \delta$$
$$\forall f \in \mathcal{F}$$

M 列紧 $\Rightarrow$ 有穷 δ 网

$$N_\delta = \{x_1, \cdots x_n\} \subset M$$

定义映射 $T: \ \mathcal{F} \to \mathbb{R}^n$

$$f \mapsto (f(x_1), \cdots f(x_n))$$

$\mathcal{F}$ 一致有界 $\Rightarrow \ R \overset{\text{def}}{=} \sup\limits_{f \in \mathcal{F}} \sup\limits_{x \in M} |f(x)| < \infty$

$$\Rightarrow \left(\sum_{k=1}^{n} |f(x_k)|^2 \right)^{1/2} \leq \sqrt{n} R , \quad \forall f \in \mathcal{F}$$

$$\Rightarrow T(\mathcal{F}) \subset \mathbb{R}^n \ \text{有界，故列紧}$$

设 $\tilde{N}_{\varepsilon/4} \overset{\text{def}}{=} \{ Tf_1 , \cdots , Tf_m \}$ 是 $T(\mathcal{F})$ 的 $\frac{\varepsilon}{4}$ 网

<u>Claim</u> $\{f_1, \cdots , f_m\}$ 是 $\mathcal{F}$ 的 ε 网

$\forall f \in \mathcal{F} , \ \exists k \in \{1, \cdots m\} \ \text{ s.t.}$

$$d_{\mathbb{R}^n}(Tf, Tf_k) < \frac{\varepsilon}{4} .$$

$\forall x \in M , \ \exists x_j \in N_\delta \ \text{ s.t. } \rho(x, x_j) < \delta$

$$\Rightarrow \quad |f(x) - f_k(x)|$$

$$\le \underbrace{|f(x) - f(x_j)|}_{\substack{< \varepsilon/4 \\ (\text{等度连续性})}} + \underbrace{|f(x_j) - f_k(x_j)|}_{\substack{\le d_{\mathbb{R}^n}(Tf,\, Tf_k) \\ < \varepsilon/4}} + \underbrace{|f_k(x_j) - f_k(x)|}_{\substack{< \varepsilon/4 \\ (\text{等度连续性})}}$$

$$< \frac{3}{4}\varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad d(f, f_k) < \varepsilon$$

Q: L^p 中列紧性判据？

<u>Thm</u> (Riesz - Fréchet - Kolmogorov)

设 $1 \le p < \infty$，$\mathcal{F} \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ 列紧 当且仅当：

(i) $\mathcal{F}$ 有界， i.e. $\sup_{f \in \mathcal{F}} \|f\|_p < \infty$

(ii) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists R > 0$ s.t.

$$\int_{|x| > R} |f(x)|^p \, dx < \varepsilon^p, \qquad \forall f \in \mathcal{F}$$

(iii) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, s.t.

$$\|\tau_h f - f\|_p < \varepsilon, \qquad \forall h \in \mathbb{R}^n \text{ with } |h| < \delta, \ \forall f \in \mathcal{F}$$

这里 $(\tau_h f)(x) \overset{\text{def}}{=} f(x+h)$

H. Brezis 《F.A., Sobolev spaces and PDE》

Thm 4.26. Cor 4.27

Rmk. L^p 中强紧性不如弱紧性有用.

HW: 1° $A \subset \ell^2$ 列紧 $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \text{(i) 有界} \\ \text{(ii) } \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \text{ s.t.} \end{cases}$

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} |x_k|^2 < \varepsilon, \ \forall x \in A$$

2° Hilbert cube $A \overset{def}{=} \{ x \in \ell^2 : |x_k| < 2^{-k}, \forall k \}$ 是 ℓ^2 中列紧集

向量空间

Def X 一向量空间

如果 $Y \subset X$ 对 X 中加法和数乘（同一数域）构成向量空间，则称之为 X 的向量子空间.

($\Leftrightarrow$ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall x, y \in Y, \ \alpha x + \beta y \in Y$)

$$x + A \overset{def}{=} \{ x + y : y \in A \}$$

$$\lambda A \overset{def}{=} \{ \lambda y : y \in A \}$$

$$A + B \overset{def}{=} \{ x + y : x \in A, y \in B \}$$

$$\operatorname{span}(A) \overset{def}{=} \left\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k, \ x_k \in A, \lambda_k \in \mathbb{K}, \ n \in \mathbb{N} \right\}$$

称为 A 张成的子空间

如果 $A \subset X$ 线性无关且 $\operatorname{span}(A) = X$，则称之为 X 的一个 Hamel 基（代数基，线性基）

Thm 任一向量空间一定有 Hamel 基.

如果 Hamel 基 A 是有限集，则定义

$$\dim X \overset{\text{def}}{=} \# A$$

否则记 $\dim X = \infty$

Def $\mathbb{K}$ —— $\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$

X —— $\mathbb{K}$ 上向量空间

如果函数 $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ 满足：

(i) (正定性) $\|x\| \geq 0$. $\forall x \in X$

$\|x\| = 0 \iff x = 0$

(ii) (齐次性) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$. $\forall x \in X$. $\forall \lambda \in \mathbb{K}$

(iii) (三角不等式) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$. $\forall x, y \in X$

则称 $\|\cdot\|$ 是 X 上一个范数. $(X, \|\cdot\|)$ 称为赋范空间

$d(x, y) \overset{\text{def}}{=} \|x - y\|$ 是 X 上度量，称为范数诱导度量或典则度量.

如果 $(X, \|\cdot\|)$ 在典则度量下完备，则称之为 Banach 空间

HW: 1. 证明：典则度量下，$(X, \|\cdot\|)$ 中的向量运算（加法，数乘）连续.

2. Ex. 1.3.9.