第四讲 (2024.9.11)

紧性 $\left\langle \begin{array}{l} \text{紧} \\ \text{列紧} \end{array} \right.$

compactness argument

Def (X, d), $A \subset X$

(i) 如果一族开集 $\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$ s.t. $A \subset \bigcup_{\alpha\in I} G_\alpha$，则称之为 A 的一个开覆盖.

(ii) 如果 A 的任一开覆盖 $\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 都有有限子覆盖, i.e. $\exists\, \alpha_1, \cdots, \alpha_N \in I$, s.t.

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{N} G_{\alpha_k}.$$

则称 A 紧

(iii) 如果 A 中任一点列都有 (在 X 中) 收敛的子列，则称 A 列紧 (sequently compact)

(iv) 如果 A 中任一点列都有在 A 中收敛的子列，则称 A 自列紧

(v) 如果空间 X 自身列紧，则称之为列紧空间.

例: $\mathbb{R}^n$ 中

列紧 $\Longleftrightarrow$ 有界 (Bolzano-Weierstrass)

自列紧 $\Longleftrightarrow$ 有界闭 $\Longleftrightarrow$ 紧

例: ℓ^2 中

$$e_n \overset{\text{def}}{=} (\underbrace{0, \cdots, 0}_{n-1\text{个}}, 1, 0, \cdots), \quad n = 1, 2, \cdots$$

$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有界，但 $d(e_n, e_m) = \sqrt{2}$, $\forall n \neq m$.

$\Longrightarrow \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 没有收敛子列.

Prop 列紧空间中任一子集合都列紧

任一闭集都自列紧

Prop 列紧空间一定完备.

Pf 设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 (X,d) 中 Cauchy 列

(X,d) 列紧 $\Longrightarrow$ 有子列 $x_{n_k} \to x_0 \in X$

$$\Longrightarrow d(x_n, x_0) \le d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_0)$$

$$\to 0 \quad \text{as } n, k \to \infty$$

Def (X,d), $A \subset X$, $\varepsilon > 0$

(i) 称 $N_\varepsilon \subset A$ 是 A 的一个 ε 网 若

$$A \subset \bigcup_{y \in N_\varepsilon} B(y, \varepsilon)$$

($\Longleftrightarrow$ $\forall x \in X$, $\exists y \in N_\varepsilon$ s.t. $d(x,y) < \varepsilon$)

(ii) 如果 $\forall \varepsilon > 0$, A 都有一个有穷 ε 网 N_ε,

(i.e. $\# N_\varepsilon < \infty$)

则称 A 完全有界.

Prop 完全有界 $\Rightarrow$ 有界

Pf $\exists N_1 = \{y_1, \cdots, y_n\}$ s.t. $A \subset \bigcup_{k=1}^{n} B(y_k, 1)$

$$\Longrightarrow A \subset B(y_1, R), \quad R \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=2}^{n} d(y_k, y_1) + 1$$

例: 有界 $\not\Rightarrow$ 完全有界

ℓ^2 中, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 没有有穷 $\frac{1}{2}$ 网

$$B(e_k, \tfrac{1}{2}) \cap \{e_n\}_{n=1}^{\infty} = \{e_k\}$$

Thm (Hausdorff)

(i) 列紧 $\Rightarrow$ 完全有界

(ii) 完备空间中，列紧 $\Leftrightarrow$ 完全有界

Pf (i) 假设 A 列紧但 $\underbrace{\text{不完全有界}}$

$\exists\, \varepsilon_0 > 0$ s.t. 有限个半径 ε_0 的球不能覆盖 A

来构造 A 中没有收敛子列的点列

任取 $x_1 \in A$

$\exists\, x_2 \in A \setminus B(x_1, \varepsilon_0)$

$\exists\, x_3 \in A \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{2} B(x_k, \varepsilon_0) \right)$

$\vdots$

$\Rightarrow$ 序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$ s.t.

$$x_n \notin \bigcup_{k=1}^{n-1} B(x_k, \varepsilon_0)$$

$\Rightarrow \quad d(x_n, x_m) \geq \varepsilon_0, \quad \forall\, n \neq m.$

$\Rightarrow \quad \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 没有收敛子列，与 A 列紧矛盾.

(ii) 设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$. 来构造它的收敛子列

对 $\varepsilon = 1$, $\exists$ 1-网 $N_1 = \{ y_1^{(1)}, \cdots, y_{m_1}^{(1)} \}$ s.t.

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A \subset \bigcup_{k=1}^{m_1} B(y_k^{(1)}, 1)$$

$\Rightarrow \quad \exists\, y_1 \in N_1$ s.t.

$B(y_1, 1)$ 含有 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 中无穷多项

$\Rightarrow$ 有子列 $\{x_n^{(1)}\}_{n=1}^{\infty} \subset B(y_1, 1)$

同理，$\exists\, y_2 \in N_{1/2}$ s.t.

$\{x_n^{(1)}\}_{n=1}^{\infty}$ 的子列 $\{x_n^{(2)}\}_{n=1}^{\infty} \subset B(y_2, \frac{1}{2})$

$\vdots$

$$\begin{array}{llll l} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & x_1^{(3)} & \cdots & \subset B(y_1, 1) \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & x_2^{(3)} & \cdots & \subset B(y_2, \frac{1}{2}) \\ x_1^{(3)} & x_2^{(3)} & x_3^{(3)} & \cdots & \subset B(y_3, \frac{1}{3}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \end{array}$$

$\Longrightarrow$ 对角线子列 $\{x_n^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ s.t.

$$x_n^{(n)} \in \bigcap_{k=1}^{n} B(y_k, \frac{1}{k}), \quad n = 1, 2, \cdots$$

$$\Longrightarrow \quad \underbrace{d(x_{n+p}^{(n+p)}, x_n^{(n)})}_{\text{同含于 } B(y_n, \frac{1}{n})} < \frac{2}{n}, \quad \forall n, \forall p.$$

$\Longrightarrow$ $\{x_n^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Cauchy 列

X完备
$\Longrightarrow$ $\{x_n^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛.

Thm 度量空间中，紧 $\Longleftrightarrow$ 自列紧

Pf 1° "$\Longrightarrow$"

Step 1. 紧 $\Longrightarrow$ 闭

设 A 紧，要证明 $X \setminus A$ 开

$\forall x \in X \setminus A$,

$$\{B(y, \tfrac{1}{3} d(x, y))\}_{y \in A} \text{ 是 } A \text{ 的一个开覆盖.}$$

A紧
$\Longrightarrow$ $\exists\, y_1, \cdots, y_n \in A$ s.t.

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{n} B(y_k, \tfrac{1}{3} d(x, y_k))$$

令 $\delta \overset{def}{=} \frac{1}{3} \min_{1 \le k \le n} d(x, y_k)$

$$\Longrightarrow B(x, \delta) \subset X \setminus A \quad \left(\because B(x, \delta) \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} B(y_k, \tfrac{1}{3} d(x, y_k))\right) = \phi \right)$$

Step 2 紧 $\Rightarrow$ 列紧

假设 A 紧但不列紧

$\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$ 没有收敛子列

(不妨设 $x_n,\ n=1,2,\cdots$ 互不相同)

令 $S_n \overset{def}{=} \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \setminus \{x_n\}$

$\Rightarrow$ S_n 闭 (没有聚点 $\Rightarrow \overline{S_n} = S_n$)

$\Rightarrow$ $X \setminus S_n$ 开

而 $\bigcup_{n=1}^{\infty} (X \setminus S_n) = X \setminus (\underbrace{\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n}_{=\phi}) = X$

$\Rightarrow$ $\{X \setminus S_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 A 的一个开覆盖.

A 紧 $\Rightarrow$ $\exists N$ s.t.

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A \subset \bigcup_{n=1}^{N} (X \setminus S_n) = X \setminus \bigcap_{k=1}^{N} S_k = X \setminus \{x_n\}_{n=N+1}^{\infty}$$

矛盾

2° "$\Leftarrow$"

假设 A 自列紧但不紧

存在 A 的开覆盖 $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$ s.t.

任意有限个 G_α 都不能覆盖 A

A 自列紧 $\Rightarrow$ $\forall n,\ \exists N_{1/n} = \{y_1^{(n)}, \cdots, y_{m_n}^{(n)}\}$, s.t.

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{m_n} B(y_k^{(n)}, \tfrac{1}{n})$$

$\Rightarrow$ $\forall n,\ \exists y_n \in N_{1/n}$ s.t. $B(y_n, \frac{1}{n})$ 不能被有限个 G_α 覆盖

（否则 A 被有限个 G_α 覆盖）

A 自列紧
$\Longrightarrow$ $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有子列 $y_{n_k} \to y_0 \in A$

设 $y_0 \in G_{\alpha_0}$

$\Longrightarrow$ $\exists\ \delta > 0$ s.t. $B(y_0, \delta) \subset G_{\alpha_0}$

$y_{n_k} \to y_0$
$\Longrightarrow$ 当 k 充分大时

$$d(y_{n_k}, y_0) < \delta/2, \quad \text{且} \quad n_k > 2/\delta$$

$$\Longrightarrow B\left(y_{n_k}, \frac{1}{n_k}\right) \subset B(y_0, \delta) \subset G_{\alpha_0}$$

与 $B\left(y_{n_k}, \frac{1}{n_k}\right)$ 不能被有限个 G_α 覆盖矛盾

$$\left(\begin{aligned} &\forall x \in B\left(y_{n_k}, \frac{1}{n_k}\right) \\ &d(x, y_0) \le d(x, y_{n_k}) + d(y_{n_k}, y_0) \\ &\qquad < \frac{1}{n_k} + \frac{\delta}{2} < \delta \end{aligned} \right)$$

<u>HW</u>: Ex. 1.3.1. 1.3.2. 1.3.4