第三讲（2024.9.9）

Def 对映射 $T: X \to X$，如果 $\exists x^* \in X$ s.t. $Tx^* = x^*$，则称 x^* 为 T 的不动点.

Def (X, d)

对映射 $T: X \to X$，如果 $\exists \alpha \in (0,1)$，s.t.

$$d(Tx, Ty) \le \alpha\, d(x, y), \quad \forall x, y \in X,$$

则称 T 为压缩映射（contraction）.

Thm（压缩映射原理，Banach 不动点定理）

完备度量空间到自身的压缩映射必有不动点，且不动点唯一.

Pf 任取 $x_0 \in X$

定义迭代序列

$$x_{n+1} = Tx_n, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

$$\Rightarrow \quad d(x_{n+1}, x_n) = d(Tx_n, Tx_{n-1}) \le \alpha\, d(x_n, x_{n-1}) \le \cdots \le \alpha^n d(x_1, x_0)$$

$$\Rightarrow \quad d(x_{n+p}, x_n) \le \sum_{k=1}^{p} d(x_{n+k}, x_{n+k-1}) \le \sum_{k=1}^{p} \alpha^{n+k-1} d(x_1, x_0) \le \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_1, x_0)$$

$\Rightarrow \quad \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Cauchy 列

X 完备 $\Longrightarrow \exists x^* \in X$ s.t. $d(x_n, x^*) \to 0$ as $n \to \infty$

$$d(Tx^*, x^*) \leq d(Tx^*, Tx_n) + d(Tx_n, x_n) + d(x_n, x^*)$$
$$\leq \alpha d(x^*, x_n) + d(x_{n+1}, x_n) + d(x_n, x^*)$$
$$\to 0 \quad \text{as } n \to \infty$$

$\Longrightarrow Tx^* = x^*$

(唯一性) 假设 $Ty = y$

$$d(x^*, y) = d(Tx^*, Ty) \leq \alpha d(x^*, y)$$

$\Longrightarrow d(x^*, y) = 0$.

<u>Rmk</u> 完备性不可去. 例: $X = (0,1)$, $d(x,y) = |x-y|$

$Tx = \frac{1}{2}x$ 无不动点.

Q: 为什么 $((0,1), d)$ 不完备?

<u>HW</u>: (Ex. 1.1.1)

(i) 完备空间的闭子集是完备的子空间.

(ii) 任一度量空间的完备子空间一定是闭子空间.

<u>完备化</u>

<u>Def</u> (X_1, d_1), (X_2, d_2)

(1) 如果映射 $T: X_1 \to X_2$ s.t.

$$d_2(Tx, Ty) = d_1(x, y), \quad \forall x, y \in X_1,$$

则称 T 是等距 (isometry)

(2) 如果 $\exists\, T: X_1 \to X_2$ $\begin{cases} \text{双射} \\ \text{等距} \end{cases}$, 则称 (X_1, d_1)

与 (X_2, d_2) 等距同构. 称 T 为 X_1 到 X_2 的等距同构映射.

(3) 如果 (X_1, d_1) 与 (X_2, d_2) 的某子空间 (X_0, d_2) 等距同构. 则称 (X_1, d_1) 可等距嵌入 (X_2, d_2), 记为

$$(X_1, d_1) \hookrightarrow (X_2, d_2)$$

在此意义下, 称 X_1 是 X_2 的子空间.

Def (X, d)

如果 $\exists (\tilde{X}, \tilde{d})$ 完备 s.t. (X, d) 与其某稠子空间 $(X_0, \tilde{d})$ 等距同构, 则称 $(\tilde{X}, \tilde{d})$ 是 (X, d) 的一个完备化.

例: 1. $\mathbb{R}$ 是 $\mathbb{Q}$ 的完备化

2. $C[a,b]$ 是 $P[a,b]$ 的完备化

3. $L^1[a,b]$ 是 $(C[a,b], \rho_1)$ 的完备化.

Thm 任一度量空间都有其完备化, 且完备化在等距同构意义下唯一.

Idea of Pf: 来自 Cantor 实数模型.

1° 构造 $(\tilde{X}, \tilde{d})$

2° 构造 $X_0 \overset{\text{dense}}{\subset} \tilde{X}$ 和等距同构 $T: X \to X_0$

3° 证明 $(\tilde{X}, \tilde{d})$ 完备

4° 唯一性

Pf 1° 令

$$\mathcal{F} \overset{\text{def}}{=} \{ (X, d) \text{ 中 Cauchy 列} \}$$

$\mathcal{F}$ 中引入等价关系

$$\underset{\{x_n\}_{n=1}^{\infty}}{\underset{\|}{\xi}} \sim \underset{\{y_n\}_{n=1}^{\infty}}{\underset{\|}{\eta}} \overset{\text{def}}{\iff} \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$$

令

$$\tilde{X} \overset{\text{def}}{=} \mathcal{F}/\sim$$

$$\tilde{d}([\xi], [\eta]) \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$$

其中 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 $[\xi]$ 中代表元

$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 $[\eta]$ 中代表元.

Claim 1 $\tilde{d}$ 良定

(i) $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$ 存在.

$$|d(x_m, y_m) - d(x_n, y_n)| \leq d(x_m, x_n) + d(y_m, y_n)$$

$$\to 0 \quad \text{as } m, n \to \infty$$

(ii) $\tilde{d}([\xi], [\eta])$ 不依赖于 $[\xi]$, $[\eta]$ 代表元选取.

Claim 2 $\tilde{d}$ 为 $\tilde{X}$ 上度量.

平凡

2° 对 $x \in X$, 记

$$\xi_x \overset{\text{def}}{=} (x, x, \cdots) \qquad (\text{常驻点列})$$

$$X_0 \overset{\text{def}}{=} \{ [\xi_x] : x \in X \}$$

令 $T: X \to X_0$

$$x \mapsto [\xi_x]$$

$\Rightarrow$ T 是等距同构的映射

Claim 3 $\quad \overline{X_0} = \tilde{X}$

$\forall [\xi] \in \tilde{X}$，任取代表元 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{d}([\xi_{x_n}], [\xi]) = \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} d(x_n, x_m) = 0$$

3° $(\tilde{X}, \tilde{d})$ 完备

设 $\{[\xi^{(k)}]\}_{k=1}^{\infty}$ 是 $(\tilde{X}, \tilde{d})$ 中 Cauchy 列.

Claim 3 $\Rightarrow$ $\forall k$, $\exists n_k$ s.t.

$$\tilde{d}([\xi^{(k)}], [\xi_{x_{n_k}^{(k)}}]) < \frac{1}{k}.$$

$$\Rightarrow \tilde{d}([\xi_{x_{n_k}^{(k)}}], [\xi_{x_{n_j}^{(j)}}])$$

$$\le \underbrace{\tilde{d}([\xi_{x_{n_k}^{(k)}}], [\xi^{(k)}])}_{<\frac{1}{k}} + \tilde{d}([\xi^{(k)}], [\xi^{(j)}]) + \underbrace{\tilde{d}([\xi^{(j)}], [\xi_{x_{n_j}^{(j)}}])}_{<\frac{1}{j}}$$

$$\to 0 \quad \text{as } k, j \to \infty$$

$\Rightarrow$ $\{[\xi_{x_{n_k}^{(k)}}]\}_{k=1}^{\infty}$ 是 $(X_0, \tilde{d})$ 中 Cauchy 列

T 等距 $\Rightarrow$ $\{x_{n_k}^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ 是 (X, d) 中 ...

$\Rightarrow$ $\xi' \overset{\text{def}}{=} \{x_{n_k}^{(k)}\}_{k=1}^{\infty} \in \mathcal{F}$

$\Rightarrow$ $[\xi'] \in \tilde{X}$

且 $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \tilde{d}([\xi_{x_{n_k}^{(k)}}], [\xi'])$

$$= \lim_{k\to\infty}\lim_{j\to\infty} d(x_{n_k}^{(k)}, x_{n_j}^{(j)}) = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \tilde{d}([\xi^{(k)}],[\xi'])$$

$$\le \underbrace{\tilde{d}([\xi^{(k)}],[\xi_{x_{n_k}^{(k)}}])}_{<\frac{1}{k}} + \tilde{d}([\xi_{x_{n_k}^{(k)}}],[\xi'])$$

$$\to 0 \quad \text{as } k\to\infty$$

4° (唯一性)

假设 (X',d') 也是 (X,d) 的一个完备化

$\Longrightarrow$ $\exists\, X_0' \overset{\text{dense}}{\subset} X'$

$\exists\, T' : X \to X_0'$ 等距同构映射

$$\begin{tikzcd}
 & X_0 \arrow[d, "\varphi"] \arrow[r, phantom, "\overset{\text{dense}}{\subset}"] & \tilde{X} \arrow[d, "\Phi"] \\
X \arrow[ur, "T"] \arrow[dr, "T'"'] & X_0' \arrow[r, phantom, "\overset{\text{dense}}{\subset}"] & X' \\
 & &
\end{tikzcd}$$

令 $\varphi \overset{\text{def}}{=} T' \circ T^{-1}$

$\Longrightarrow$ φ 是 $(X_0,\tilde{d})$ 到 (X_0',d') 的等距同构

Claim 4 φ 可延拓为 $\tilde{X}$ 到 X' 的等距同构

$\forall\, [\xi] \in \tilde{X}$, $\exists\, [\xi^{(n)}] \in X_0$, $n=1,2,\dots$ s.t.

$$\tilde{d}([\xi^{(n)}],[\xi]) \to 0 \quad \text{as } n\to\infty$$

φ是等距同构 $\Longrightarrow$ $\{\varphi([\xi^{(n)}])\}_{n=1}^{\infty}$ 是 (X',d') 中 Cauchy 列

X'完备 $\Longrightarrow$ $\exists\, y\in X'$ s.t. $d(\varphi([\xi^{(n)}]),y) \to 0$

定义映射 $\Phi : \tilde{X} \to X'$, $[\xi] \mapsto y$

$\Rightarrow$ 亚纯导矩阵构 (HW)

HW: P. 14. 1.2.1 – 1.2.4

P. 11. 1.1.4, 1.1.6