第四周作业答案

于俊骜

2024 年 9 月 30 日

习题 1.4

13

证明. 假设不稠密，则由 Riesz 引理，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists y \in X \backslash \overline{X_0}$ 满足 $\|y\| = 1$，且

$$\inf_{x \in \overline{X_0}} \|x - y\| > 1 - \varepsilon \Longrightarrow c\|y\| \geq \inf_{x \in X_0} \|x - y\| \geq 1 - \varepsilon$$

取 $\varepsilon < 1 - c$，则 $\|y\| > 1$，矛盾！ $\square$

14

(1)

证明. 线性性平凡，我们只要证明闭性。

设 $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ 为 M 中的收敛列，其极限为 x。于是 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists K > 0$，当 $k > K$ 时

$$\|x^{(k)} - x\| = \sup_{n \geq 1} \mid \xi_n^{(k)} - \xi^{(k)} \mid < \varepsilon$$

于是

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n}{2^n} \right| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n^{(k)}}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n - \xi_n^{(k)}}{2^n} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mid \xi_n - \xi_n^{(k)} \mid}{2^n} < \varepsilon$$

令 $\varepsilon \to 0$，则得到结论。 $\square$

(2)

证明. 构造

$$x^{(k)} = \left(1 - 2^{-k}, -1, \cdots, -1, 0, \cdots\right) \in M$$

这里 $x^{(k)}$ 有且仅有前 $k+1$ 项非零。此时有

$$\|x^k - x_0\| = \max\{1 + 2^{-k}, 1\} = 1 + 2^{-k} \to 1,\ k \to \infty$$

另一方面，

$$\|x - x_0\| = \sup_{n\geq 1} (\xi_1 - 2, \xi_2, \xi_3, \cdots)$$

假设对任意 $n \geq 2$ 都有 $|\xi_n| \leq 1$，则

$$2 - \xi_1 = 2 - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n}{2^n} \geq 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 1$$

这说明 $\|x - x_0\| \geq 1$，进而

$$\inf_{x\in C_0} \|x - x_0\| = 1$$

假设 $x \in C_0$ 满足 $\|x - x_0\| = 1$，则上面的不等号全部取等，此时

$$x = (1, -1, -1, \cdots) \notin C_0$$

矛盾！ □

15

证明. 先任取满足 $\|y\| = 1$ 的 $y \in X \backslash M$，定义

$$d(y) = \inf_{x\in M} \|x - y\|.$$

由 $\dim M < +\infty$ 知 M 闭，从而 $X\backslash M$ 开，故 $d(y) > 0$。此时，存在 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足

$$d \leq \|x_k - y\| \leq d + \frac{1}{k}$$

注意到 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset B_{d+1}(y)$，即 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$ 有界，从而在 M 中有收敛子列，设其极限为 x_0。此时

$$d = \|y - x_0\|$$

我们取

$$y_0 = \frac{y - x_0}{d}$$

则 $\forall x \in M$，都有

$$\|y_0 - x\| = \frac{1}{d}\|y - (x_0 + dx)\| \geq \frac{1}{d}\inf_{x \in M}\|y - x\| = 1$$

□

17

(1)

证明.

$$\|[x]\|_0 = \inf_{x \in [x]}\|x\| = \inf_{y - x \in X_0}\|y\| = \inf_{z \in X_0}\|x - z\|$$

□

(2)

证明. 任取 $x, y \in X$，都有

$$\|\varphi(x) - \varphi(y)\|_0 = \|[x] - [y]\|_0 = \|[x - y]\|_0 = \inf_{z \in [x-y]}\|z\| \leq \|x - y\|$$

这说明 φ 是 Lipschitz 函数，从而连续。 □

(3)

证明. 若 $[x] = [0]$ 则结论平凡。若 $[x] \neq [0]$，由

$$\|[x]\|_0 = \inf_{x \in [x]}\|x\| > 0$$

知，存在 $y \in [x]$，使得

$$\inf_{x\in[x]} \|x\| \le y \le 2 \inf_{x\in[x]} \|x\|$$

这个 $y \in X$ 即满足

$$\|y\| \le 2\|[x]\|_0$$

$\square$

(4)

证明. 构造映射

$$\begin{aligned} \varphi : X &\longrightarrow \mathbb{K} \\ f(x) &\longrightarrow f(0) \end{aligned}$$

这显然是满射。注意到

$$\varphi(f(x)) = \varphi(g(x)) \Longleftrightarrow f(0) = g(0) \Longrightarrow f - g \in X_0$$

因此 φ 诱导双射

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} : X/X_0 &\longrightarrow \mathbb{K} \\ [f(x)] &\longrightarrow f(0) \end{aligned}$$

这里

$$g(x) \in [f(x)] \Longleftrightarrow g(0) = f(0)$$

最后只要证明 $\bar{\varphi}$ 是等距。首先注意到 $\bar{\varphi}$ 线性，于是

$$\begin{aligned} \|\bar{\varphi}(f)\|_0 &= \inf_{g\in X_0} \|f - g\| = \inf_{g\in X_0} \sup_{x\in[0,1]} |\, f(x) - g(x) \,| \\ &= \inf_{\substack{h\in X \\ h(0)=f(0)}} \sup_{x\in[0,1]} |\, h(x) \,| \ge h(0) = f(0) \end{aligned}$$

注意到可以取 $h(x) = (1-x)f(0)$ 使得等号成立。因此

$$\|\bar{\varphi}(f)\|_0 = |f(0)|$$

$\square$

补充题 1

(1)

证明下面的极化恒等式：

- 对于 $\mathbb{K}=\mathbb{R}$，有

$$\langle x,y\rangle=\frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\right)$$

- 对于 $\mathbb{K}=\mathbb{C}$，有

$$\langle x,y\rangle=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3}i^k\|x+i^ky\|^2$$

证明. 对于 $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ 有

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2-\|x-y\|^2&=\langle x+y,x+y\rangle-\langle x-y,x-y\rangle\\&=\langle x,x\rangle+2\langle x,y\rangle+\langle y,y\rangle\\&-\langle x,x\rangle+2\langle x,y\rangle-\langle y,y\rangle\\&=4\langle x,y\rangle\end{aligned}$$

而对于对于 $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ 有

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{3}i^k\|x+i^ky\|^2&=\sum_{k=0}^{3}i^k\langle x+i^ky,x+i^ky\rangle\\&=\sum_{k=0}^{3}i^k\left(\langle x,x\rangle+\langle x,i^ky\rangle+\langle i^ky,x\rangle+\langle i^ky,i^ky\rangle\right)\\&=\sum_{k=0}^{3}i^k\left(\langle x,x\rangle+i^{-k}\langle x,y\rangle+i^k\langle y,x\rangle+\langle y,y\rangle\right)\\&=\sum_{k=0}^{3}\left(\langle x,y\rangle+(-1)^k\langle y,x\rangle\right)\\&=4\langle x,y\rangle\end{aligned}$$

□

(2)

证明平行四边形等式：

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)$$

证明. 直接计算得

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2+\|x-y\|^2&=\langle x+y,x+y\rangle+\langle x-y,x-y\rangle\\&=\langle x,x\rangle+2\langle x,y\rangle+\langle y,y\rangle\\&+\langle x,x\rangle-2\langle x,y\rangle+\langle y,y\rangle\\&=2\|x\|^2+2\|y\|^2\end{aligned}$$

□

补充题 2

证明：一个范数由内积诱导当且仅当它满足平行四边形等式。

证明. $\Longrightarrow$: 已得。

$\Longleftarrow$: 我们只考虑 $\mathbb{K}=\mathbb{R}$，对于 $\mathbb{C}$ 的证明类似。

我们定义

$$\langle x,y\rangle=\frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\right)$$

则

$$\langle x,x\rangle=\frac{1}{4}\|2x\|^2=\|x\|^2\geq 0$$

等号成立当且仅当 $x=0$。而 $\langle x,y\rangle=\langle y,x\rangle$ 是平凡的。最后只要证双线性性，不妨只对前一分量证明。由极化恒等式，

$$\begin{aligned}\|x_1+x_2+y\|^2&=2\|x_1+y\|^2+2\|x_2\|^2-\|x_1-x_2+y\|^2\\&=2\|x_2+y\|^2+2\|x_1\|^2-\|x_2-x_1+y\|^2\end{aligned}$$

即

$$
\begin{aligned}
\|x_1+x_2+y\|^2 =&\|x_1+y\|^2+\|x_2\|^2-\frac{1}{2}\|x_1-x_2+y\|^2\\
&+\|x_2+y\|^2+\|x_1\|^2-\frac{1}{2}\|x_2-x_1+y\|^2
\end{aligned}
$$

同理有

$$
\begin{aligned}
\|x_1+x_2-y\|^2 =&\|x_1-y\|^2+\|x_2\|^2-\frac{1}{2}\|x_1-x_2-y\|^2\\
&+\|x_2-y\|^2+\|x_1\|^2-\frac{1}{2}\|x_2-x_1-y\|^2
\end{aligned}
$$

代入计算，得到

$$
\begin{aligned}
\langle x_1+x_2,y\rangle &= \frac{1}{4}\|x_1+x_2+y\|^2-\frac{1}{4}\|x_1+x_2-y\|^2\\
&= \frac{1}{4}\|x_1+y\|^2+\frac{1}{4}\|x_2+y\|^2-\frac{1}{4}\|x_1-y\|^2-\frac{1}{4}\|x_2-y\|^2\\
&= \frac{1}{4}\left(\|x_1+y\|^2-\|x_1-y\|^2\right)+\frac{1}{4}\left(\|x_2+y\|^2-\|x_2-y\|^2\right)\\
&= \langle x_1,y\rangle+\langle x_2,y\rangle
\end{aligned}
$$

另一方面，由前面可得

$$\langle -x,y\rangle = -\langle x,y\rangle$$

归纳可以得到

$$\langle nx,y\rangle = n\langle x,y\rangle,\ \forall\, n\in\mathbb{Z}$$

通过代换进一步有

$$\langle qx,y\rangle = q\langle x,y\rangle,\ \forall\, q\in\mathbb{Q}$$

由 $\|\cdot\|$ 的连续性可得 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 的连续性，于是

$$\langle \lambda x,y\rangle = \lambda\langle x,y\rangle,\ \forall\, \lambda\in\mathbb{R}$$

□