第十四周作业答案

于俊骜

2024 年 12 月 12 日

习题 2.6

1

证明. 设 $T \in \mathcal{L}(X)$ 为可逆算子，则由 Banach 逆算子定理可知 $\|T^{-1}\| = \|T\|^{-1} < +\infty$. 任取可逆算子 $S \in \mathcal{L}(X)$ 使得 $\|S - T\| < \varepsilon$，则

$$S = T + S - T = T\left(I + T^{-1}(S - T)\right)$$

对于充分小的 $\varepsilon > 0$，有

$$\|T^{-1}(S - T)\| \leq \|T^{-1}\|\|S - T\| < \frac{1}{2}$$

于是 S 可逆，且

$$S^{-1} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(T^{-1}(S - T)\right)^k\right) T^{-1}$$

它满足

$$\|S^{-1}\| \leq \frac{\|T^{-1}\|}{1 - \|T^{-1}(S - T)\|} < +\infty$$

□

4

证明. 先计算点谱。设

$$Ax = \lambda x$$

则

$$(x_2, x_3, \cdots) = \lambda(x_1, x_2, \cdots) \Longrightarrow x_{i+1} = \lambda x_i,\ \forall\, i \geq 1$$

此时可设

$$x = (x_1, \lambda x_1, \lambda^2 x_1, \cdots) \Longrightarrow \|x\|_{l^2}^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 = |x_1|^2 \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^{2i}$$

该级数收敛当且仅当 $|\lambda| < 1$。另一方面 $|\lambda| < 1$ 时

$$(1, \lambda, \lambda^2, \cdots) \in l^2$$

是 λ 对应的特征向量。因此

$$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| < 1\}$$

下设 $|\lambda| = 1$。假设 $x \perp R(\lambda I - A)$，则考虑共轭算子

$$0 = \langle x, (\lambda I - A)y \rangle = \langle (\bar{\lambda} I - A^*)x, y \rangle,\ \forall\, y \in l^2 \Longrightarrow A^* x = \bar{\lambda} x.$$

这里不难验证 A^* 是 l^2 上的右推移算子。此时

$$x_{i+1} = \bar{\lambda} x_i,\ \forall\, i \geq 1$$

结合 $|\bar{\lambda}| = 1$ 以及 $x \in l^2$ 可得 $x = 0$，这说明

$$\overline{R(\lambda I - A)} = l^2$$

即

$$\mathbb{S}^1 \subset \sigma_c(A)$$

下面证明 $\lambda \in \mathbb{S}^1$ 不是正则值。假设

$$\begin{aligned} y = \lambda x - Ax &\Longrightarrow y_i = \lambda x_i - x_{i+1},\ \forall\, i \geq 1 \\ &\Longrightarrow \frac{y_i}{\lambda^{i+1}} = \frac{x_i}{\lambda^i} - \frac{x_{i+1}}{\lambda^{i+1}},\ \forall\, i \geq 1 \\ &\Longrightarrow \sum_{i=1}^{k-1} \frac{y_i}{\lambda^{i+1}} = \frac{x_1}{\lambda} - \frac{x_k}{\lambda^k},\ \forall\, i \geq 1 \\ &\Longrightarrow x_k = \lambda^{k-1} x_1 - \sum_{i=1}^{k-1} \lambda^{k-1-i} y_i \end{aligned}$$

取 $y = \lambda(x_1 - 1)e_1$，则

$$x_k = \lambda^{k-1} x_1 - (x_1 - 1)\lambda^{k-1} = \lambda^{k-1},\ \forall\, k \geq 2$$

但此时

$$x = (x_1, \lambda, \lambda^2, \cdots) \notin l^2$$

这说明 $y \in l^2 \backslash R(\lambda I - A)$。

最后，注意到

$$\|A^n x\|_{l^2} = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|x\|_{l^2} \Longrightarrow \|A^n\| \leq 1$$

即

$$\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| < 1\}$$

结论得证。 □

习题 3.1

1

证明. 假设 $A^{-1} \in \mathcal{L}(X)$，则

$$I = A^{-1} A \in \mathfrak{C}(X)$$

这与 $\dim X = +\infty$ 矛盾！ □

2

证明. $\Longrightarrow$:

不难验证 A 是单射，从而可以定义逆算子

$$A^{-1}: R(A) \longrightarrow X$$

它满足

$$\|A^{-1}y\| \leq \frac{1}{\alpha}\|y\|,\ \forall\, y \in R(A)$$

从而由上一题结论知 $\dim X < +\infty$。

$\Longleftarrow$:

此时 $\dim R(A) \leq \dim X < +\infty$，于是 A 是有限秩算子，从而紧。 $\square$

3

证明. 任取有界集 $E \subset X$，则由 A 的有界性知 $A(E)$ 是 $R(A)$ 中的有界集。注意到

$$R(K) = \bigcup_{k=1}^{\infty} K\left(B_n(0)\right)$$

于是由 $R(A) \subset R(K)$ 知，存在 n_0 使得

$$A(E) \subset K\left(B_{n_0}(0)\right)$$

后者是列紧集，从而 $A(E)$ 列紧，进而 $A \in \mathfrak{C}(X, Y)$。 $\square$