习题课

HW: 对 $g\in L^1$. 如果 $\exists C>0$ s.t. $|\int fg|\le C\|f\|_{L^p}$ $\forall f\in L^\infty$.

则 $g\in L^{p'}$ 且 $\|g\|_{L^{p'}}\le C$.

pf (p=1 case). 令 $E_k=\{|g|>C+\frac{1}{k}\}$

若结论不成立，则 $\exists k$ s.t. $\mu(E_k)>0$.

由于 Ω 是 σ 有限的，不妨设 $\mu(E_k)<+\infty$ (否则可考虑 $E_k\cap\Omega_n$)

∴ 考虑 $f_k=\chi_{E_k}\operatorname{sgn}(g)$.

∴ $f_k\in L^\infty$ $\|f_k\|_{L^1}=\mu(E_k)$.

且 $f_kg=|g|\chi_{E_k}\ge(C+\frac{1}{k})\chi_{E_k}$.

∴ $|\int f_kg|\ge(C+\frac{1}{k})\mu(E_k)>C\mu(E_k)=C\|f_k\|_{L^1}$ 矛盾!

∴ $\forall k$, $\mu(E_k)=0 \Rightarrow \operatorname{ess\,sup}|g|\le C$, 即 $g\in L^\infty$, $\|g\|_{L^\infty}\le C$. □

2.5.5. X 是 B 空间. 则 X 自反 $\Leftrightarrow$ X^* 自反.

pf: $\Rightarrow$. 由 X 自反 ∴ $J: X\to X^{**}$, $x\mapsto J_x$, $J_x(f)=f(x)$ $\forall f\in X^*$ 是满射.

并考虑 $\tilde{J}: X^*\to X^{***}$, $f\mapsto\tilde{J}_f$, $\tilde{J}_f(A)=A(f)$ $\forall A\in X^{**}$. 只需证 $\tilde{J}$ 是满射即可.

任取 $\mathcal{B}\in X^{***}$, 由 $J: X\to X^{**}$. $J^*: X^{***}\to X^*$.

∴ 令 $f=J^*(\mathcal{B})\in X^*$. ∴ 对 $\forall A\in X^{**}$ 由 J 满, $\exists x\in X$ s.t. $A=J_x$

∴ $\mathcal{B}(A)=\mathcal{B}(J_x)=J^*(\mathcal{B})(x)=f(x)=J_x(f)=A(f)$.

∴ $\mathcal{B}=\tilde{J}_f \Rightarrow \tilde{J}$ 是满射

$\Leftarrow$: 已知 $\tilde{J}$ 是满射. 要证 J 是满射.

因为 X^* 自反 由 ($\Rightarrow$). X^{**} 自反

∵ J 为 $X\to X^{**}$ 的等距嵌入. X 完备 $\Rightarrow$ $J(X)$ 为闭子空间

∴ 由 Pettis. $J(X)$ 自反 $\Rightarrow$ X 自反 □. (2.5.6)

(*).

Rmk (*): $\varphi: A \to B$ 为等距同构 则 A 自反 $\Rightarrow$ B 自反.

pf: 易验证 $\varphi^*: B^* \to A^*$ 为等距同构 (满射: $\forall f \in A^*$, 令 $g(y) = f(\varphi^{-1}y)$, 则 $f = \varphi^* g$)

对 $J_B: B \to B^{**}$, $y \mapsto J_{B,y}$. $\quad J_{B,y}(g) = g(y) \quad \forall g \in B^*$.

令 $\tilde{J}_A: A \to A^{**}$, $x \mapsto \tilde{J}_{A,x}$. $\quad \tilde{J}_A = (\varphi^{-1})^{**} \circ J_B \circ \varphi$.

$\therefore$ 对 $\forall x \in A$. $\quad \tilde{J}_{A,x} = (\varphi^{-1})^{**}(J_{B,\varphi(x)})$.

$\therefore$ $\forall f \in A^*$
$$\tilde{J}_{A,x}(f) = (\varphi^{-1})^{**}(J_{B,\varphi(x)})(f)$$
$$= J_{B,\varphi(x)}((\varphi^{-1})^* f)$$
$$= (\varphi^{-1})^* f(\varphi(x)) = f(\varphi^{-1} \circ \varphi(x)) = f(x)$$
$$= J_{A,x}(f).$$

$\therefore$ $\tilde{J}_{A,x} = J_{A,x}$ $\Rightarrow$ $\tilde{J}_A$ 同构 $\Rightarrow$ J_B 同构 $\square$

2.5.6. 即证: $\varphi: X \to Y$ 为等距嵌入 (X 是 B^* 空间, Y 是 B 空间)
则 $\varphi(X)$ 闭 $\Leftrightarrow$ X 完备.

pf: $\Rightarrow$. $\varphi: X \to \varphi(X)$ 为等距同构

对 $\{x_n\}$ 为 Cauchy 列 $\Rightarrow$ $\{\varphi(x_n)\}$ 为 Cauchy 列.

$\xRightarrow{(Y完备)}$ $\varphi(x_n) \to y \in Y$. $\xRightarrow{(\varphi(X)闭)}$ $y \in \varphi(X)$ $\Rightarrow$ $y = \varphi(x)$, $\exists x \in X$

由于等距 $\therefore$ $\|x_n - x\| = \|\varphi(x_n) - \varphi(x)\| \to 0$

$\Rightarrow$ $x_n \to x$ $\Rightarrow$ X 完备.

$\Leftarrow$: 对 $y_n = \varphi(x_n) \to y$.

$\xRightarrow{(等距)}$ $\{x_n\}$ 为 Cauchy 列 $\xRightarrow{(X完备)}$ $x_n \to x \in X$.

$\xRightarrow{(等距)}$ $\varphi(x_n) \to \varphi(x)$ $\Rightarrow$ $y = \varphi(x) \in \varphi(X)$ $\Rightarrow$ $\varphi(X)$ 闭 $\square$

证明：l^1 不为自反空间

pf：否则. 若 l^1 自反 则 $(l^1)^{**} \cong l^1$. 可分.

但 $(l^1)^{**} = (l^\infty)^*$

由 Banach $\Rightarrow$ l^∞ 可分. 矛盾！ $\therefore l^1$ 不自反.

Rmk：l^1 可分：$\bigcup_{n=1}^{+\infty} \{(p_1, \cdots p_n, 0, \cdots 0, \cdots) \in l^1 \mid p_1 \cdots p_n \in \mathbb{Q}\}$

为 l^1 的可数稠密子集

l^∞ 不可分：$\{x_A\}_{A \subseteq \mathbb{N}}$. 为 l^∞ 的不可数子集

其中：$x_{A,n} = \begin{cases} 1 & \text{if } n \in A. \\ 0 & \text{else.} \end{cases}$

$\therefore \|x_A - x_{A'}\|_{l^\infty} = 1$ if $A \neq A'$.