第十一周作业答案

于俊骜

2024 年 11 月 18 日

习题 2.4

8

证明. $\Longrightarrow$:

由 M 是极大线性子空间知，存在 $x_0 \in X \backslash M$，使得

$$X = M \oplus \text{span}\{x_0\}$$

此时考虑 $[x] \in X/M$，这里设 $x = \lambda x_0 + x_1$，其中 $x_1 \in M$。注意到

$$[x] = \lambda[x_0] + [x_1] = \lambda[x_0]$$

这说明

$$\dim(X/M) = 1$$

$\Longleftarrow$:

取 $[0] \neq [x_0] \in X/M$，则有

$$X/M = \{[x_0]\}$$

任取 $x \in X$，都存在 λ 使得 $[x] = \lambda[x_0]$。由 $x - \lambda x_0 \in M$ 知存在 $x_1 \in M$ 使得

$$x = \lambda x_0 + x_1$$

我们最后只要证明该分解唯一。事实上

$$x=\lambda x_0+x_1=\lambda' x_0+x_1' \Longrightarrow (\lambda-\lambda')x_0=-x_1+x_1'\in M \Longrightarrow \lambda=\lambda'$$

因此

$$M+\operatorname{span}\{x_0\}=M\oplus\operatorname{span}\{x_0\}$$

□

9

证明. 注意到

$$z=|z|e^{i\arg z}$$

于是对 $x\in E$ 有

$$\begin{aligned}|f(x)|&=f(x)e^{-i\arg f(x)}\\&=f\left(e^{-i\arg f(x)}x\right)\\&=\mathrm{Re}f\left(e^{-i\arg f(x)}x\right)\\&\le\sup_{y\in E}\mathrm{Re}f\left(e^{-i\arg f(y)}y\right)\\&=\sup_{y\in E}\mathrm{Re}f\left(y\right)\end{aligned}$$

最后一个等号来自 E 的均衡性。 □

10

证明. 只证 X 为复线性空间的情形。由 Ascoli 定理，存在实线性泛函 $g\in X^*$ 和 x 使得

$$g(x_0)<\alpha<g(x),\ \forall\, x\in E$$

构造复线性泛函 $f(x)=g(x)+ig(-ix)\in X^*$，则由上题可知

$$|f(x)|=\mathrm{Re}f\left(e^{-i\arg f(x)}x\right)=g\left(e^{-i\arg f(x)}x\right)$$

即

$$|f(x)| = |f(e^{i\arg f(x)}x)| = g(x) > \alpha$$

同理

$$|f(x_0)| = g(x_0) < \alpha$$

□

13

证明. 由凸集分离定理知，存在 $f \in X^*$ 和 $s \in \mathbb{R}$，使得

$$\begin{aligned}
f(x) &\leq s,\ \forall x \in M \\
f(x) &\geq s,\ \forall x \in B_{d(x)}(x)
\end{aligned}$$

此时

$$\begin{aligned}
\sup_{y\in M} f(y) \leq s &\leq \inf_{y\in B_{d(x)}(x)} f(y) \\
&= \inf_{\|y\|\leq 1} f(x - d(x)y) \\
&= f(x) - d(x)\sup_{\|y\|\leq 1} f(y) \\
&= f(x) - d(x)\|f\|
\end{aligned}$$

因此取

$$f_1 = \frac{f}{\|f\|}$$

即满足要求。 □

14

证明. 由上一题知

$$d(x) = \inf_{z\in M}\|x - z\| \leq f_1(x) - \sup_{z\in M} f_1(z) \leq \sup_{\substack{f\in X^* \\ \|f\|=1}} \left\{ f(x) - \sup_{z\in M} f(z) \right\}$$

下面我们只需证对任意 $f \in X^*$ 有

$$\|f\| = 1 \Longrightarrow \inf_{z\in M} \|x - z\| \geq f(x) - \sup_{z\in M} f(z)$$

对任意正整数 n，存在 $z_n \in M$ 使得

$$\|x - z_n\| \leq \inf_{z\in M} \|x - z\| + \frac{1}{n}$$

于是

$$f(x) - \sup_{z\in M} f(z) \leq f(x) - f(z_n) \leq \|f\|\|x - z_n\| \leq \inf_{z\in M} \|x - z\| + \frac{1}{n}$$

令 $n \to \infty$ 即得结论。 $\square$