第八周作业答案

于俊骜

2024 年 10 月 31 日

习题 2.2

3

证明. 由 Riesz 表示定理，存在 $g_1, g_2 \in H$ 使得

$$J_x(f) = \langle f, g_1 \rangle$$
$$J_y(f) = \langle f, g_2 \rangle$$

下证

$$K(x, y) = \langle g_2, g_1 \rangle$$

是 H 的再生核。

取定 $y \in S$，则用 g_2 替换 f 可得

$$K(x, y) = \langle g_2, g_1 \rangle = J_x(g_2) = g_2(x) \in H$$

另一方面

$$f(y) = J_y(f) = \langle f, g_2 \rangle = \langle f, K(\cdot, y) \rangle$$

□

4

证明. 首先

$$z, w \in D \Longrightarrow 1 - z\bar{w} > 0$$

这说明 $K(z,w)$ 的确是定义在 $D \times D$ 上的函数。接下来验证再生核的两条定义即可。

首先，对于任意给定 w

$$K(z,w) = \frac{1}{\pi(1-z\bar{w})^2}$$

是 D 上的解析函数，即 $K(\cdot,w) \in H^2(D)$。

进一步将 f 和 K 在 $z=0$ 处 Taylor 展开得到

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$
$$K(z,w) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\bar{w}^n z^n$$

于是由**习题 1.6.11(3)** 得到

$$\langle f, K(\cdot,w)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n = f(w)$$

□

习题 2.3

7

证明. 我们通过

$$Ax = \lim_{n\to\infty} A_n x, \ \forall\, x \in X$$

逐点定义线性算子 A。结合 $A_n \in \mathcal{L}(X,Y)$ 知

$$\sup_n \|A_n x\| < +\infty$$

由共鸣定理，存在 $M>0$，使得

$$\sup_n \|A_n\| \le M$$

从而

$$\|Ax\| = \|\lim_{n\to\infty} A_n x\| = \lim_{n\to\infty} \|A_n x\| \le \varliminf_{n\to\infty} \|A_n\|\|x\| \le M\|x\|$$

即 $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ 且

$$\|A\| \le \varliminf_{n\to\infty} \|A_n\|$$

□

8

证明. 对于 $\xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots)$，定义泛函

$$f_n(\xi) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \xi_k$$

由 Hölder 不等式可得

$$|f_n(\xi)| \le \left(\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \|\xi\|_{l^p}$$

这说明 $f_n : l^p \to \mathbb{R}$ 是有界线性泛函。由上一题结论，它们的逐点极限 $f \in (l^p)^*$。

下面，构造 $x = (x_1, x_2, \cdots)$，其中 $x_k = |\alpha_k|^{q-1} e^{-i\theta_k}$，而 $\theta_k = \arg \alpha_k$，于是

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^{(q-1)p} = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^q$$

且

$$f(x_1, \cdots, x_n, 0, \cdots) = f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k |\alpha_k|^{q-1} e^{-i\theta_k} = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^q$$

进一步结合

$$f(x_1, \cdots, x_n, 0, \cdots) \le \|f\| \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|f\| \left(\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^q\right)^{\frac{1}{p}}$$

可知

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \|f\|,\ \forall\, n \Longrightarrow \left(\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \|f\| < +\infty \Longrightarrow \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots) \in l^q$$

反向的不等号由 Hölder 不等式得到，从而

$$\|f\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

□

9

证明. 与上题完全相同地得到 $f \in (l^1)^*$，从而

$$|\alpha_n| = |f(e_n)| \leq \|f\|,\ \forall\, n \Longrightarrow \sup_n |\alpha_n| \leq \|f\| < +\infty \Longrightarrow \alpha \in l^\infty$$

结合 Hölder 不等式可进一步得到

$$\|f\| = \sup_n \alpha_n$$

□

补充题 1

多项式全体组成的向量空间在任何范数下都不是 Banach 空间。

证明. 对于多项式组成的线性空间 X，平凡地有 $\dim X = +\infty$。注意到

$$\{1, x, x^2, \cdots\}$$

是 X 的一组可数 Hamel 基，于是由 Baire 纲定理，X 不完备。 □

补充题 2

设 (X,d) 完备，则对于一列开集 $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$，若对任意 n 都有 $\overline{U_n}=X$，则

$$\overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n}=X$$

证明. 考虑闭集 $C_n=X\backslash U_n$，则

$$\overline{C_n}=\overline{X\backslash U_n}=X\backslash U_n^{\circ}=\overline{U_n}\backslash U_n=\partial U_n \Longrightarrow \overline{C_n}^{\circ}=\varnothing.$$

这说明 C_n 是疏集，于是

$$\overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n}=\overline{\bigcap_{n=1}^{\infty}(X\backslash C_n)}=\overline{X\backslash\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right)}=X\backslash\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right)^{\circ}=X$$

□