1.6.5、设M是Hilbert空间X子集，求证。

$$(M^\perp)^\perp = \overline{\mathrm{span} M}$$

Pf: $x \in M^\perp \Rightarrow x \in (\mathrm{span} M)^\perp \Rightarrow x \in (\overline{\mathrm{span} M})^\perp$，

而若$x \in (\overline{\mathrm{span} M})^\perp$，自然有$x \in M^\perp$，从而$M^\perp = (\overline{\mathrm{span} M})^\perp$。

故等价于证$(\overline{\mathrm{span} M}^\perp)^\perp = \overline{\mathrm{span} M}$

任取$x \in \overline{\mathrm{span} M}$，$y \in \overline{\mathrm{span} M}^\perp$，有$(y, x) = 0$，从而$x \in (\overline{\mathrm{span} M}^\perp)^\perp$

即$\overline{\mathrm{span} M} \subset (\overline{\mathrm{span} M}^\perp)^\perp$

若$\exists x \in (\overline{\mathrm{span} M}^\perp)^\perp \setminus \overline{\mathrm{span} M}$，由正交分解，

$\exists y \in \overline{\mathrm{span} M}$，$z \in \overline{\mathrm{span} M}^\perp$，$x = y + z$，~~$y \neq 0$~~，$z \neq 0$。

则对任意$u \in \overline{\mathrm{span} M}^\perp$，

$0 = (x, u) = (y, u) + (z, u) = (z, u) \neq 0$，矛盾。

从而$(\overline{\mathrm{span} M}^\perp)^\perp = \overline{\mathrm{span} M}$。 $\square$

1.6.6、$L^2[-1,1]$中，偶函数集的正交补

Pf: 奇函数集（的等价类）

任取f为偶函数，并设$g \in L^2[-1,1]$满足$(f, g) = 0$。

即，$\int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}dx = 0$。

$$\int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}dx = \int_{-1}^{0} + \int_{0}^{1} f(x)\overline{g(x)}dx$$

$$= \int_{0}^{1} f(x)[\overline{g(-x)} + \overline{g(x)}]dx$$

$f(x)$在$[0,1]$上可以是任意的（只要对应调整$[-1,0]$上的部分）。

从而可以取$f(x)$在$[0,1]$上等于$g(-x)+g(x)$，

就有，$\int_{0}^{1} |g(-x)+g(x)|^2 dx = 0$。

$$g(-x) = -g(x) \quad a.e.$$

即g是奇函数的等价类。 $\square$

1.6.7. $L^2[a,b]$中，$S=\{e^{2\pi inx}\}$.

(1) 若 $|b-a|\leq 1$，求证 $S^\perp=\{\theta\}$.

(2) 若 $|b-a|>1$，求证 $S^\perp\neq\{\theta\}$. L^2空间.

Pf: (1)、$S=\{e^{2\pi inx}\}$ 是长度为1区间上的正交规范基.

从而若 $|b-a|=1$，$S^\perp=\{\theta\}$.

若 $|b-a|<1$，S是 $[a,a+1]$上 正交规范基.

设 $f\in L^2[a,b]\cap S^\perp$，将 f 延拓为 $[a,a+1]$上函数.

$$\hat{f}=\begin{cases} f, & x\in[a,b] \\ 0 & x\in(b,a+1] \end{cases}$$

则 $\forall n$，$\int_a^{a+1}\hat{f}\cdot e^{2\pi inx}dx=\int_a^b f\cdot e^{2\pi inx}dx=0$.

从而 $\hat{f}\in S^\perp$，$\hat{f}=\theta$，只能是 $f=\theta$

(2)、若 $|b-a|>1$、构造 $f\in S^\perp$ 且 $f\neq\theta$.

考虑 $f=\begin{cases} 1. & [a,b-1] \\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n e^{2\pi inx} & [b-1,b] \end{cases}$ ，a_n 待定.

实际上，$\forall k$，$(f,e^{2\pi ikx})=0$.

即 $0=\int_a^{b-1}\overline{e^{2\pi ikx}}dx+\int_{b-1}^{b}\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n e^{2\pi inx}\cdot\overline{e^{2\pi ikx}}dx$,

$=\int_a^{b-1}e^{2\pi ikx}dx+a_k$.

从而 $a_k=-\int_a^{b-1}\overline{e^{2\pi ikx}}dx$，得到f. □

1.6.9. 设 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 Hilbert 空间 X 中两个正交规范集, 满足 $\sum_{n=1}^{\infty}\|e_n-f_n\|^2<1$.

求证: 一个完备蕴含另一个完备

Pf: 只需证 $\{e_n\}$ 完备 $\Rightarrow$ $\{f_n\}$ 完备.

反证, 若 $\{f_n\}$ 不完备, 则有 $u\neq\theta$, 但 $\forall n$, $(u,f_n)=0$.

则 $\|u\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|(u,e_n)|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|(u,e_n-f_n)+(u,f_n)|^2$,

$=\sum_{n=1}^{\infty}|(u,e_n-f_n)|^2$

$\leq(\sum_{n=1}^{\infty}\|e_n-f_n\|^2)\cdot\|u\|^2$.

$<\|u\|^2$, 矛盾.

从而 $\{f_n\}$ 完备. ∎.

1.6.10. 设 X 是 Hilbert 空间, X_0 是 X 闭线性子空间, $\{e_n\}$, $\{f_n\}$ 分别为 X_0, $X_0^{\perp}$ 正交规范基.

求证: $\{e_n\}\cup\{f_n\}$ 是 X 正交规范基.

Pf: $\forall x\in X$, 有正交分解. $x=y+z$, $y\in X_0$, $z\in X_0^{\perp}$.

因 $\{e_n\}$, $\{f_n\}$ 为 X_0, $X_0^{\perp}$ 上 正交规范基,

$y=\sum(y,e_n)e_n$, ~~$z=\sum(z,e_n)$~~ $z=\sum(z,f_n)f_n$.

而 $(x,e_n)=(y+z,e_n)=(y,e_n)$,

$(x,f_n)=(y+z,f_n)=(z,f_n)$.

从而有 $x=\sum(x,e_n)e_n+\sum(x,f_n)f_n$.

$\{e_n\}\cup\{f_n\}$ 为一组基, 且显然仍正交规范. ∎.

1.6.11. $H^2(D)=\{u$ 在 D 内解析 $\mid \iint_D |u(z)|^2 dxdy<\infty\}$.

内积定义为 $(u,v)=\iint_D u(z)\overline{v(z)}\,dxdy$.

且有正交规范基. $\varphi_n(z)=\sqrt{\frac{n}{\pi}}\,z^{n-1}$.

(1). 若 $u(z)$ 的 Taylor 展式为 $u(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k z^k$.

求证: $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{|b_k|^2}{1+k}<\infty$.

(2). 设 $u,v\in H^2(D)$. $u(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$. $v(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k z^k$.

求证: $(u,v)=\pi\cdot\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{a_k\overline{b_k}}{k+1}$.

(3) 设 $u(z)\in H^2(D)$. 求证:

$$|u(z)|\le\frac{\|u\|}{\sqrt{\pi}(1-|z|)}.$$

(4) $H^2(D)$ 是 Hilbert 空间

解: (1). $u(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k z^k=\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_{n-1}\sqrt{\frac{\pi}{n}}\,\varphi_n(z)$.

从而 $\iint_D |u(z)|^2dxdy=\cancel{\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_n^2}\ \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{\pi b_k^2}{k+1}<\infty$.

(2). $u(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{n-1}\sqrt{\frac{\pi}{n}}\,\varphi_n(z)$. $v(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_{n-1}\sqrt{\frac{\pi}{n}}\,\varphi_n(z)$.

$(u,v)=\int\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{\pi\cdot a_k\cdot\overline{b_k}}{k+1}$.

(3). 设 $u(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k z^k$. 则

$$|u(z)|\le\sum_{k=0}^{\infty}|b_k||z|^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|b_k|}{\sqrt{1+k}}\cdot\sqrt{1+k}\,|z|^k$$

$$\le\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|b_k|^2}{1+k}\right)^{\frac12}\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty}(1+k)|z|^{2k}\right)^{\frac12}$$

$$=\left(\frac{\|u\|^2}{\pi}\right)^{\frac12}\cdot\left(\frac{1}{(1-|z|^2)^2}\right)^{\frac12}$$

$$=\frac{\|u\|}{\sqrt{\pi}(1-|z|^2)}.$$

(4) 设 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是依 $H^2(D)$ 上诱导度量的 Cauchy 列

一方面、诱导出的度量实际也是 L^2 度量，从而在 $L^2(D)$ 中

有在极限函数 u

另一方面，任取 $z\in D$，令 $r=1-|z|$，则在 $\overline{B(z,\rho)}$ 上 $(\rho<r)$，

由(3)得，$|u_n-u_m|\leq C\|u_n-u_m\|$，

Cauchy 列有界，故 $\{u_n\}$ 在 D 上局部一致有界

由 Montel 定理，$\{u_n\}$ 是正规族，于是其有子列一致

收敛至某解析函数 $\tilde{u}$.（因是 Cauchy 列，实际上就是

$\{u_n\}$ 一致收敛）。

因 $\iint_D |u_n-u|^2 dxdy \to 0$，故有子列 $\{u_{n_k}\}$ a.e 一致收敛

至 u，由极限唯一性，知 $u=\tilde{u}$.

而 u 为解析且满足 $\iint_D |u|^2 dxdy<\infty$，$u\in H^2(D)$.

从而 $H^2(D)$ 是 Hilbert 空间。 $\square$

1.6.16（变分不等式）. 设 X 为 Hilbert 空间，$a(x,y)$ 是 X 上

共轭对称双线性函数，且 $\exists M,\delta>0$. s.t.

$$\delta\|x\|^2\leq a(x,x)\leq M\|x\|^2.$$

设 $u_0\in X$，C 为 X 一个闭凸子集.

求证：函数 $x\mapsto a(x,x)-\mathrm{Re}(u_0,x)$，在 C 上达最小值，唯一，

且 $\mathrm{Re}\,[2a(x_0,x-x_0)-(u_0,x-x_0)]\geq 0$.

Pf：令 $f(x)=a(x,x)-\mathrm{Re}(u_0,x)$，并记 $d=\inf\limits_{x\in C} f(x)$.

则 $\forall n\in\mathbb{N}$，$\exists\, x_n$ s.t. $d\leq f(x_n)\leq d+\frac{1}{n}$.

f 连续，只要证明 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列.

$$\|x_n-x_m\|^2 \le \frac{1}{\delta} a(x_n-x_m, x_n-x_m)$$
$$= \frac{1}{\delta}\left[2a(x_n,x_n)+2a(x_m,x_m) - 4a\left(\frac{x_n+x_m}{2}, \frac{x_n+x_m}{2}\right)\right].$$
$$\le \frac{1}{\delta}.\left(2(d+\tfrac{1}{n})+2(d+\tfrac{1}{m})-4d\right) \to 0. \quad (n,m\to\infty)$$

唯一性：若有 $x_0, \tilde{x}_0 \in C$ 均满足 $f(x_0)=f(\tilde{x}_0)=d$.

则 $\|x_0-\tilde{x}_0\|^2 \le \frac{1}{\delta} a(x_0-\tilde{x}_0, x_0-\tilde{x}_0)$
$$= \frac{1}{\delta}\left(2a(x_0,x_0)+2a(\tilde{x}_0,\tilde{x}_0) - 4a\left(\frac{x_0+\tilde{x}_0}{2}, \frac{x_0+\tilde{x}_0}{2}\right)\right].$$
$$\le \frac{1}{\delta}.(4d-4d)=0.$$

从而 $x_0=\tilde{x}_0$.

任取 $x\in C$. 考虑 $\varphi_x(t) = f(x_0+t(x-x_0))$, ~~对于~~ 其中 $t\in[0,1]$.

则应有 $\forall x, t$. $\varphi_x(t) \ge \varphi_x(0)$. 从而 $\varphi_x'(0)\ge 0$.

$$\varphi_x(t) = a(x_0+t(x-x_0), x_0+t(x-x_0)) - \mathrm{Re}(u_0, x_0+t(x-x_0))$$
$$= a(x_0,x_0) + 2t\,\mathrm{Re}\,a(x_0, x-x_0) + t^2 a(x-x_0, x-x_0) - \mathrm{Re}(u_0, x_0+t(x-x_0)).$$
$$0 \le \varphi_x'(0) = \mathrm{Re}\left[2a(x_0, x-x_0) - (u_0, x-x_0)\right]. \quad \square$$

1.6.12. 设 X 为内积空间，$\{e_n\}$ 为正交规范集.

求证：$\left|\sum_{n=1}^{\infty}(x,e_n)\overline{(y,e_n)}\right| \le \|x\|\,\|y\|$.

Pf: $\left|\sum_{n=1}^{\infty}(x,e_n)\overline{(y,e_n)}\right| \le \left(\sum_{n=1}^{\infty}|(x,e_n)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty}|(y,e_n)|^2\right)^{\frac{1}{2}}$
$$\le \|x\|\cdot\|y\|. \quad \square$$