1.1.4. 设 T 是 X 上一个压缩映射，且 $\rho(Tx,Ty)\leq \alpha\rho(x,y)$ $(0<\alpha<1)$.
$\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\frac{\varepsilon}{\alpha}$，就有：$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta$，当 $\rho(x,y)<\delta$ 时，有
$\rho(Tx,Ty)\leq\alpha\delta=\varepsilon$，从而 T 连续. $\square$

1.1.6. 考虑映射 $f(x)=\rho(x,Tx)$.
由三角不等式，$\rho(x,Tx)\leq\rho(x,x_0)+\rho(x_0,Tx_0)+\rho(Tx_0,Tx)$.
从而 $|\rho(x,Tx)-\rho(x_0,Tx_0)|\leq\rho(x,x_0)+\rho(Tx_0,Tx)\leq 2\rho(x,x_0)$.
类似 1.1.4 知 $f(x)$ 在 M 上连续.
因 M 是 $\mathbb{R}^n$ 中有界闭集，f 在 M 上可取到最小值，即 $\exists x_0\in M$，
使得 $\rho(x_0,Tx_0)=f(x_0)=\min\limits_{x\in M}f(x)$.

下证 $f(x_0)=0$.
否则，设 $\rho(x_0,Tx_0)=f(x_0)>0$，则有 $\rho(Tx_0,T^2x_0)<\rho(x_0,Tx_0)$.
与 $\rho(x_0,Tx_0)$ 是最小值矛盾. 从而只能是 $\rho(x_0,Tx_0)=0$，x_0 就是不动点.

唯一性：
设有两个不动点 x，x'，则 $\rho(x,x')=\rho(Tx,Tx')<\rho(x,x')$，矛盾. $\square$

地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号 邮编：230026
电话：0551-63602184 传真：0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

2.1 验证 ρ 是 S 上的距离：

正定性，对称性显然，只需验证三角不等式。

对此，由 $f(t)=\frac{t}{1+t}$ 在 $t\geq 0$ 时的单调性，有 $\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leq\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}$。

$$\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}=\frac{|a|}{1+|a|+|b|}+\frac{|b|}{1+|a|+|b|}\leq\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}.$$

设 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)$，$y=(\eta_1,\eta_2,\cdots)$，$z=(\zeta_1,\zeta_2,\cdots)$。

则
$$\rho(x,z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\cdot\frac{|\xi_k-\zeta_k|}{1+|\xi_k-\zeta_k|}$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\cdot\frac{|\xi_k-\eta_k+\eta_k-\zeta_k|}{1+|\xi_k-\eta_k+\eta_k-\zeta_k|}$$
$$\leq\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\cdot\frac{|\xi_k-\eta_k|}{1+|\xi_k-\eta_k|}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\cdot\frac{|\eta_k-\zeta_k|}{1+|\eta_k-\zeta_k|}=\rho(x,y)+\rho(y,z).$$

验证完备性：

设 $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是 S 中 Cauchy 列，其中 $x_i=(\xi_{1i},\xi_{2i},\cdots)$。

则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当 $n,m>N$ 时，有 $\rho(x_n,x_m)<\frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$

特别地，$\frac{1}{2^k}\cdot\frac{|\xi_{kn}-\xi_{km}|}{1+|\xi_{kn}-\xi_{km}|}<\frac{\varepsilon}{2^{k+1}}\Rightarrow|\xi_{kn}-\xi_{km}|<\frac{\varepsilon}{\frac{1}{2^k}-\varepsilon}$，$\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}$。

只要取 $\varepsilon<1$ 就有 $|\xi_{kn}-\xi_{km}|<\varepsilon$。

因此 $\forall k\in\mathbb{N}$，$\{\xi_{k,i}\}_{i=1}^{\infty}$ 是 $\mathbb{C}$ 中 Cauchy 列，由 $\mathbb{C}$ 完备性，这些序列均收敛

设对应的极限是 ξ_k，并令 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)$。

下证 x 是 $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ 依 ρ 收敛的极限。

$$\rho(x_n,x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\cdot\frac{|\xi_k-\xi_{kn}|}{1+|\xi_k-\xi_{kn}|}.$$

因 $\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\cdot\frac{|\xi_k-\xi_{kn}|}{1+|\xi_k-\xi_{kn}|}<\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2^N}$。

只要取 $N>\log_2\frac{1}{\varepsilon}$，就有 $\frac{1}{2^N}<\varepsilon$。

固定 N，则对每个 $k\le N$，由前面构造知，$\exists N_k$，使得当 $m>N_k$ 时

$|\xi_{mk}-\xi_m|<\varepsilon$.

取 $\tilde N=\max\{N_1,N_2,\cdots N_N\}$，则当 $m>\tilde N$ 时就有，

$$\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2^k}\frac{|\xi_{mk}-\xi_m|}{1+|\xi_{mk}-\xi_m|}<\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2^k}\cdot|\xi_{mk}-\xi_m|$$
$$<\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2^k}\cdot\varepsilon$$
$$<\varepsilon.$$

综上，$\rho(x_m,x)<2\varepsilon$，即 $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ 的确依 ρ 收敛于 x。
从而 (S,ρ) 是完备度量空间，证。

1.2.4，令 $P_k(x)=x^k$.

则 $\rho(P_m,P_n)=\int_0^1|x^m-x^n|\,dx=\left|\frac{1}{m+1}-\frac{1}{n+1}\right|$.

$\forall\varepsilon>0$，只要取 $N>\frac{2}{\varepsilon}-1$，则 $\forall n,m>N$，$\rho(P_m,P_n)<\frac{2}{N+1}<\varepsilon$.

从而 $\{P_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ 是 Cauchy 列。

令 $f(x)=\begin{cases}0, & x\in[0,1)\\ 1, & x=1\end{cases}$，则 $\rho(P_m,f)=\frac{1}{m+1}\to0\ (m\to\infty)$，但 f 不是多项式。

其完备化空间是 $L^1([0,1])$，证。

完备性：设 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是 Cauchy 列，则可找出子列 $\{f_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ 满足 $\rho(f_{n_i},f_{n_{i+1}})<\frac{1}{2^i}$

考虑 $g(x)=\sum_{i=1}^{\infty}|f_{n_{i+1}}(x)-f_{n_i}(x)|$，则由单调收敛定理，

$$\int_0^1 g(x)\,dx=\int_0^1\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}|f_{n_{i+1}}(x)-f_{n_i}(x)|\,dx=\cancel{\lim_{N\to\infty}\int_0^1}\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\int_0^1|f_{n_{i+1}}(x)-f_{n_i}(x)|\,dx<1.$$

于是，$f_{n_1}(x)+\sum_{i=1}^{\infty}(f_{n_{i+1}}(x)-f_{n_i}(x))$ 几乎处处有限。

从而可以定义，$f(x)=\begin{cases}f_{n_1}(x)+\sum_{i=1}^{\infty}(f_{n_{i+1}}(x)-f_{n_i}(x)), & \text{右侧有限}\\ 0, & \text{级数发散至无穷的点}\end{cases}$，$f(x)\in L^1([0,1])$

且有 $\rho(f(x),f_{n_k}(x))=\int_0^1\left|\sum_{i=k}^{\infty}f_{n_{i+1}}(x)-f_{n_i}(x)\right|dx\to0\ (k\to\infty)$.

于是找到了收敛子列 $\{f_{n_i}\}$，由 1.2.2，$\{f_i\}$ 也是收敛列。

地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号 邮编：230026
电话：0551-63602184 传真：0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

稠密性：L^1 函数由连续函数逼近，连续函数由多项式逼近。

1.2.2、"$\Rightarrow$" 基本身是收敛子列

"$\Leftarrow$" 设 $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是 Cauchy 列，且有收敛子列 $\{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$，其极限为 x。

$\forall \varepsilon>0$，$\exists k$ 使得 $i>k$ 时，$\rho(x_{n_i}, x)<\varepsilon$。

同时，$\exists N$ 使得 $n, m>N$ 时，$\rho(x_n, x_m)<\varepsilon$。

于是当 $n>\max\{N, n_k\}$ 时，$\rho(x_n, x)<\rho(x_n, x_{n_m})+\rho(x_{n_m}, x)<2\varepsilon$，$(n_m>N)$。

从而 $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是收敛列。 //

1.2.3、考虑序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，其中 $x_n=(1, \frac{1}{2}, \cdots \frac{1}{n}, 0, 0, \cdots)$。

则 $\{x_i\}$ 是 Cauchy 列。令 $x=(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \cdots)$。

则 $\rho(x_n, x)=\frac{1}{n+1}\to 0 \quad (n\to\infty)$。但 $x\notin F$。从而 F 不完备

F 的完备化空间是，$x=(\xi_1, \xi_2 \cdots \xi_k \cdots)$，$\lim\limits_{k\to\infty}\xi_k=0$ 的实数列全体，记为 $\widehat{F}$。

完备性：设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Cauchy 列，其中 $x_n=(\xi_{1n}, \xi_{2n}, \cdots)$

则，$\forall k\in\mathbb{N}$，$\{\xi_{kn}\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathbb{R}$ 中 Cauchy 列，从而有极限 ξ_k。

令 $x=(\xi_1, \xi_2, \cdots)$，则 $\forall \varepsilon>0$，$\forall k\in\mathbb{N}$，$\exists N_k$，$n\geq N_k$ 时，有 $|\xi_{kn}-\xi_k|<\varepsilon$。

另有 N 使得 $\forall n, m\geq N$，$\rho(x_n, x_m)<\varepsilon$。

当 $n>N$ 时，$\rho(x_n, x)=\sup\limits_{k\geq 1}|\xi_{kn}-\xi_k|$。

考察每一个 k，若 $N_k\leq N$，则 $|\xi_{kn}-\xi_k|<\varepsilon$。

若 $N_k>N$，则 $|\xi_{kn}-\xi_k|\leq|\xi_{kn}-\xi_{kN_k}|+|\xi_{kN_k}-\xi_k|<2\varepsilon$。

总之有 $\rho(x_n, x)\leq 2\varepsilon$，即 x 是 $\{x_n\}$ 的极限。

下证 $x\in\widehat{F}$。

固定 ε，则存在某个 N，满足 $\rho(x_N, x)<\varepsilon$。$\{\xi_{kN}\}_{k=1}^{\infty}$ 收敛至 0，从而 $\exists \widehat{N}$。

使得当 $k\geq\widehat{N}$ 时，$|\xi_{kN}|<\varepsilon$。

则当 $k\geq\widehat{N}$ 时，$|\xi_k|\leq|\xi_k-\xi_{kN}|+|\xi_{kN}|<\rho(x_N, x)+|\xi_{kN}|<2\varepsilon$。

从而 $\{\xi_k\}$ 也收敛至 0，从而 $x\in\widehat{F}$。 //

...y of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号　邮编：230026
电话：0551-63602184 传真：0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

1.3.1 "⇒" A 本身可作为列紧 ε 网

"⇐" 设 N 是 A 的列紧 ε 网，则 N 有有限 ε 网，记其为 M.

$\forall x\in A$，$\exists y\in N$，$\rho(x,y)<\varepsilon$，~~且存在~~ $z\in M$，$\rho(y,z)<\varepsilon$.

于是 $\rho(x,z)\leqslant\rho(x,y)+\rho(y,z)=2\varepsilon$.

而 M 是 A 有限 2ε 网，从而 A 完全有界，因此列紧. □.

1.3.2、固定 $\varepsilon>0$，则 $\forall x\in M$，$\exists\delta_x$，使得当 $\rho(x,x')<\delta_x$ 时，$d(f(x),f(x'))<\varepsilon$，

$M\subset\bigcup_{x\in M}B(x,\delta_x)$，从而有 M 中有限个元素 x_k，$k=1,2,\cdots n$，$M<\bigcup_{k=1}^{n}B(x_k,\delta_{x_k})$，

从而 $f(M)\subset\bigcup_{k=1}^{n}B(f(x_k),\varepsilon)$，有界.

只需对上确界证明.

设 $\beta=\sup_{x\in M}f(x)$，则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists x_\varepsilon\in M$，$f(x_\varepsilon)>\beta-\varepsilon$. 取 $\varepsilon=\frac{1}{n}$，则得到

序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，满足 $f(x_k)>\beta-\frac{1}{k}$，$\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ 有收敛子列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$，记其极限为 x_0，

则 $x_0\in M$，且 $f(x_0)=\beta$. □.

1.3.4、记 $d=\rho(F_1,F_2)$，并令 $f(x,y)=\rho(x,y)$，$x\in F_1$，$y\in F_2$.

~~$f(x_1,y_1)=f(x_2,y_2)$~~ 则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists x_\varepsilon,y_\varepsilon$ $f(x_\varepsilon,y_\varepsilon)<d+\varepsilon$. 取 $\varepsilon=\frac{1}{n}$，则得到序列

$\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$f(x_n,y_n)<d+\frac{1}{n}$.

$\{x_n\}$ 有收敛子列 $\{x_{n_k}\}$，以 $x_0\in F_1$ 为极限，$\{y_{n_k}\}$ 有收敛子列 $\{y_{n_{k_j}}\}$，以 $y_0\in F_2$

为极限，且显然 $\{x_{n_{k_j}}\}$ 也以 x_0 为极限.

于是有 $x_0\in F_1$，$y_0\in F_2$，$\rho(x_0,y_0)=d$. □.