2.3.1. φ 是满射. 且 $\|\varphi(x)\| = \inf_{y \in [x]} \|y\| \le \|x\|$.

从而 $\varphi \in \mathcal{L}(X, X/X_0)$. φ 是开映射. $\square$

2.3.2. 若 $Ux=0$. 由 $\|Ux\| \ge m\|x\|$. $x=0$. 从而 U 单. 有逆

$\forall y \in Y$. $Ux=y$ 有解. 从而 U 满

由逆映射定理. U 有连续逆 U^{-1}.

且 $\|y\| \ge m\|U^{-1}y\|$. $\Rightarrow \|U^{-1}\| \le \frac{1}{m}$ $\square$

2.3.3. 若 $Ax=0$. 则 $m\|x\|^2 \le |(Ax, x)| = 0$. $x=0$. A 单. 有逆

同时. 若 $x \in R(A)^{\perp}$. 则 $(Ax, x)=0$ 同样有. $x=0$ 于是 $R(A)^{\perp}=\{0\}$.

只要证 $R(A)$ 闭

设 $\{Ax_n\}$ 是 $R(A)$ 中 Cauchy 列. 则由

$m\|x\|^2 \le |(Ax, x)| \le \|x\| \cdot \|Ax\| \Rightarrow \|x\| \le \frac{1}{m}\|Ax\|$.

$\{x_n\}$ 是 H 中 Cauchy 列. 设其极限为 x. 则 $Ax_n \to Ax \in R(A)$.

于是 $R(A)$ 闭. $R(A) = \overline{R(A)} = \{0\}^{\perp} = H$. A 满.

由逆映射定理. $\exists A^{-1} \in \mathcal{L}(H)$ $\square$

2.3.4. (1). 若 $x_n \to x$. $Ax_n \to y$. 由 D 闭知 $x \in D$.

由 A 连续知. 有 $Ax_n \to Ax$. 于是 $Ax=y$. A 闭

(2). 任取 若 $x_n \to x$. $Ax_n \to y$. 由 Y 闭知 $y \in Y$.

由 A 闭知 $x \in D$. $Ax=y$. $\{x_n\}$ 可以是任意的. 从而 D 闭

(3). $D(A^{-1}) \ni y_n \to y$. $A^{-1}y_n \to x \Leftrightarrow \underset{A^{-1}y_n}{\underset{\|}{x_n}} \to x$. $Ax_n \to y$

由 A 闭. $x \in D(A)$. 且 $Ax=y$.

即 $y \in D(A^{-1})$. $A^{-1}y = x$. 从而 A^{-1} 闭

(4). 由(3). A 单射. 闭 $\Rightarrow A^{-1}$ 闭

由(2). A^{-1} 闭. 连续. X 完备 $\Rightarrow D(A^{-1}) = R(A)$ 闭.

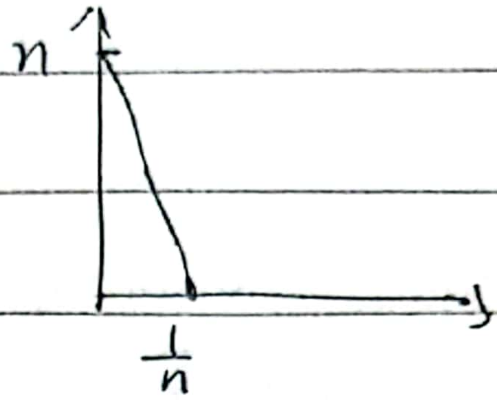
$R(A) = \overline{R(A)} = Y$. $\square$

Date Page

2.13.15 ，$C[0,1]$ 在范数 $\|f\| = \max\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$ 下完备，

由等价范数定理，若 $(C[0,1], \|\cdot\|_1)$ 是闭空间，则 $\|\cdot\|$，$\|\cdot\|_1$ 等价，

考虑 $f_n(x) = \begin{cases} n-n^2x, & x\in[0,\frac{1}{n}], \\ 0, & x\in(\frac{1}{n},1]. \end{cases}$



则 $\|f_n\| = n$，$\|f_n\|_1 = \frac{1}{2}$

由此任意性知 ~~$\|f_n\|, \|f\|$~~ $\|\cdot\|$，$\|\cdot\|_1$ 不等价，

从而 $(C[0,1], \|\cdot\|_1)$ 不完备，∎