第3次习题课

HW $(C(M), d)$ 完备

pf: 考虑 $f_n \in C(M)$ 为一列 Cauchy 列. 即 $\forall \varepsilon>0$. $\exists N$. $\forall n, m > N$.

有 $\|f_n - f_m\|_{C(M)} < \varepsilon$, 即 $\forall x \in M$, $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$. $(*)$

固定 $x \in M$. 注意到 $\{f_n(x)\}$ 为 Cauchy 数列, 从而存在极限, 记为 $f(x)$

也即 $f_n(x) \to f(x)$.

在 $(*)$ 中令 $m \to +\infty$, 即有 $|f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$. 对 $\forall x \in M$ 成立.

从而 $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$

最后, 由一致收敛 f_n 连续 $\Rightarrow$ f 连续. 即有 $f_n(x) \xrightarrow{C(M)} f(x)$.

$(C(M), d)$ 完备 $\square$

HW: 1° $A \subseteq l^2$ 列紧 $\Longleftrightarrow$ $\begin{cases} \text{(i) 有界} \\ \text{(ii) } \forall \varepsilon>0.\ \exists N.\ \text{s.t.} \sum_{k=N+1}^{+\infty} |x_k|^2 < \varepsilon.\ \forall x \in A. \end{cases}$

2°. Hilbert Cube $A \overset{def}{=} \{x \in l^2 \mid |x_k| < 2^{-k}, \forall k\}$ 在 l^2 中列紧.

pf: 1° $\Rightarrow$: 列紧集显然是有界的.

假设(ii)不成立, 即 $\exists \varepsilon_0$ $\forall n$, $\exists x^{(n)} \in A$. s.t. $\sum_{k=n+1}^{+\infty} |x_k^{(n)}|^2 \ge \varepsilon_0$

由于 A 列紧 $\exists k_n \uparrow +\infty$. s.t. $x^{(k_n)}$ 收敛 即 $x^{(k_n)}$ 为 Cauchy 列

$\therefore$ 对于 $\frac{\varepsilon_0}{100}$ $\exists N$. s.t. $\forall n, m > N$.

有 $\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i^{(k_n)} - x_i^{(k_m)}|^2 < \frac{\varepsilon_0}{100}$

$\therefore$ 取 $n = N+1$. 由于 $x^{(k_n)} \in l^2$. $\exists N_1$. s.t. $\sum_{i=N_1+1}^{+\infty} |x_i^{(k_n)}|^2 < \frac{\varepsilon_0}{100}$

再选取 $m > n = N+1$ 满足 $k_m > N_1$.

$\therefore$ 由条件 $\sum_{i=k_m+1}^{+\infty} |x_i^{(k_m)}|^2 \le \sum_{i=N_1+1}^{+\infty} |x_i^{(k_m)}|^2$.

$\Rightarrow \sum_{i=N_1+1}^{+\infty} |x_i^{(k_m)}|^2 \ge \varepsilon_0$.

$\therefore \sum_{i=N_1+1}^{+\infty} |x_i^{(k_n)} - x_i^{(k_m)}|^2 \ge \frac{1}{2} \sum_{i=N_1+1}^{+\infty} |x_i^{(k_m)}|^2 - \sum_{i=N_1+1}^{+\infty} |x_i^{(k_n)}|^2 \ge \frac{49}{100} \varepsilon_0$.

与 $\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i^{(k_n)} - x_i^{(k_m)}|^2 < \frac{\varepsilon_0}{100}$ 矛盾. $\therefore$(ii) 成立.

$\Leftarrow$: 考虑 $\forall \{x^{(n)}\} \subseteq A$. 对 $\forall \varepsilon > 0$, 由 (ii), $\exists N$.

s.t. $\forall n$, $\sum_{i=N+1}^{+\infty} |x_i^{(n)}|^2 < \frac{\varepsilon}{100}$.

$\therefore$ 对 $\forall i = 1, 2, \cdots N$, 由于 A 有界 $\Rightarrow$ $\{x_i^{(n)}\}$ 为有界数列

故存在 Cauchy 子列

$\therefore$ 可选出子列 $\{x^{(k_n)}\}$, 满足 $\exists N_0$, $\forall n, m > N_0$

有 $|x_i^{(k_n)} - x_i^{(k_m)}|^2 < \frac{\varepsilon}{100N}$

$$\therefore \sum_{i=1}^{+\infty} |x_i^{(k_n)} - x_i^{(k_m)}|^2 \le \sum_{i=1}^{N} |x_i^{(k_n)} - x_i^{(k_m)}|^2 + \sum_{i=N+1}^{+\infty} 2\left(|x_i^{(k_n)}|^2 + |x_i^{(k_m)}|^2\right)$$
$$\le \frac{1}{20}\varepsilon.$$

$\therefore \{x^{(k_n)}\}$ 为 Cauchy 列 $\square$

2°. $\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|^2 < \sum_{i=1}^{+\infty} 4^{-i} < 1$.

$\sum_{i=N+1}^{+\infty} |x_i|^2 < \sum_{i=N+1}^{+\infty} 4^{-i} < 4^{-N}$.

$\therefore$ A 满足 (i), (ii) 由 1°, A 列紧. $\square$

HW:

consider $f: X \times X \to X$
$(v, u) \mapsto u + v$.

take $(v_n, u_n) \to (v, u)$ in $X \times X$

i.e. $d_{X\times X}((v_n, u_n), (v, u)) = d(v_n, v) + d(u_n, u)$
$= \|v_n - v\| + \|u_n - u\| \to 0$.

i.e. $\|v_n - v\|, \|u_n - u\| \to 0$.

$\therefore d(f(v_n, u_n), f(v, u)) = d(u_n + v_n, u + v)$
$= \|u_n + v_n - u - v\|$
$\le \|u_n - u\| + \|v_n - v\| \to 0$.

$\therefore f$ 连续.

Consider $g: \mathbb{K} \times X \to X$
$(\lambda, v) \mapsto \lambda v$.

考虑 $(\lambda_n, v_n) \to (\lambda, v)$ in $\mathbb{K} \times X$

i.e. $d_{\mathbb{K}\times X}((\lambda_n, v_n), (\lambda, v)) = d_{\mathbb{K}}(\lambda_n, \lambda) + d_X(v_n, v)$
$= |\lambda_n - \lambda| + \|v_n - v\| \to 0$

i.e. $|\lambda_n - \lambda| \to 0$, $\|v_n - v\| \to 0$.

$\therefore |\lambda_n|, \|v_n\|$ 有界，记 $\exists M$. $|\lambda_n| \le M$, $\|v_n\| \le M$

$$\therefore d(g(\lambda_n, v_n), g(\lambda, v)) = d(\lambda_n v_n, \lambda v)$$
$$= \|\lambda_n v_n - \lambda v\|$$
$$\le |\lambda_n| \, \|v_n - v\| + |\lambda_n - \lambda| \, \|v\|$$
$$\le M(\|v_n - v\| + |\lambda_n - \lambda|) \to 0$$

$\therefore g$ 连续 □

1.3.9. 由 A-A，只需证明 E 一致等度连续

对 $\forall \varepsilon > 0$，取 $\delta = \left(\frac{\varepsilon}{C}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$

对 $\forall$ $d(t_1, t_2) < \delta$. 有 $|x(t_1) - x(t_2)| \le C\, d(t_1, t_2)^{\alpha}$
$$\le C\delta^{\alpha} \le \varepsilon. \quad \square$$

1.4.2. (1). 正定：$\|x(t)\| = \sup_{t\in[0,1]} |x(t)| \ge 0$

且 $\sup_{t\in[0,1]} |x(t)| = 0 \iff x \equiv 0$.

齐次：$\|\lambda x(t)\| = \sup_{t\in[0,1]} |\lambda| \, |x(t)| = |\lambda| \sup_{t\in[0,1]} = |\lambda| \, \|x(t)\|$.

三角不等式：$\|x(t) + y(t)\|$
$$= \sup_{t\in[0,1]} |x(t) + y(t)| \le \sup_{t\in[0,1]} |x(t)| + |y(t)|$$
$$\le \sup_{t\in[0,1]} |x(t)| + \sup_{t\in[0,1]} |y(t)| = \|x(t)\| + \|y(t)\|$$

$\therefore \|\cdot\|$ 为 $C[0,1]$ 上的范数. □

(2). 考虑 $A = \{x \in C[0,1] \mid x$ 在每个 $[\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}]$ 上为一次函数, $\forall n \ge 2\}$.

显然. A 为线性子空间.

令 $\varphi: A \to l^{\infty}$.
$$x \mapsto (x(1), x(\tfrac{1}{2}) \cdots x(\tfrac{1}{n}) \cdots)$$

$\therefore \varphi$ 为线性的一一映射.

首先. $|x(\frac{1}{n})| \le \sup_{t\in[0,1]} |x(t)| = \|x(t)\|$

$\Rightarrow \|\varphi(x)\| \le \|x\|$.

然后. 由于 x 在 $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ 上为线性函数.
$$\sup_{t\in[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]} |x(t)| = \max\{|x(\tfrac{1}{n+1})|, |x(\tfrac{1}{n})|\}.$$

$\therefore \sup\limits_{t\in[0,\frac{1}{n}]} |x(t)| = \|x\| \le \sup\limits_{n} \{|x(\frac{1}{n})|\} = \|\varphi(x)\|.$

从而 $\|\varphi(x)\| = \|x\|$. φ 为等距同构

1.4.3. (1) 正定性, 齐次性 显然.

$$\|f+g\|_1^2 = \int_a^b |f+g|^2 + |f'+g'|^2.$$

$$= \int_a^b |f|^2 + |f'|^2 + \int_a^b |g|^2 + |g'|^2 + 2\int_a^b fg + f'g'.$$

$$= \|f\|_1^2 + \|g\|_1^2 + 2\int_a^b fg + f'g'.$$

$$\left(\int_a^b fg + f'g'\right)^2 \le \left(\int_a^b \sqrt{f^2+f'^2}\sqrt{g^2+g'^2}\right)^2.$$

$$\le \int_a^b f^2+f'^2 \int_a^b g^2+g'^2.$$

$$= \|f\|_1^2 \|g\|_1^2$$

$\therefore \|f+g\|_1^2 \le \|f\|_1^2 + \|g\|_1^2 + 2\|f\|_1\|g\|_1 = (\|f\|_1 + \|g\|_1)^2$, □

(2) WLOG. 设 $[a,b] = [-1,1]$. 考虑 $f_n = \sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}$

显然 $f_n \in C^1[-1,1]$

$$|f_n(x) - f_m(x)| = \left|\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}} - \sqrt{x^2+\frac{1}{m^2}}\right|. = \frac{\left|\frac{1}{n^2}-\frac{1}{m^2}\right|}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{x^2+\frac{1}{m^2}}} \le \left|\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right|.$$

$$f_n'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}} \qquad \therefore |f_n'(x) - f_m'(x)| = \left|\frac{x}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+\frac{1}{m^2}}}\right|.$$

$$\le \begin{cases} 2 & |x| < \sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}} \\ \left|\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right| & |x| \ge \sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}} \end{cases}$$

$\therefore f_n$ 在 $\|\cdot\|_1$ 下为 Cauchy 列

同时. 注意到 $|f_n(x) - |x|| \le \frac{1}{n}$.

$$|f_n'(x) - \mathrm{sgn}(x)| = \left|\frac{x}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}} - \mathrm{sgn}\, x\right|.$$

$$\le \begin{cases} 2 & |x| < \sqrt{\frac{1}{n}} \\ \sqrt{\frac{1}{n}} & |x| \ge \sqrt{\frac{1}{n}} \end{cases}$$

$$\therefore \int_0^1 |f_n(x) - |x||^2 + |f_n'(x) - \mathrm{sgn}\, x|^2 \to 0.$$

但不可能存在 $f\in C^1[-1,1]$ s.t. $f' = \mathrm{sgn}\, x$ a.e.

$\therefore \forall f$, $f_n \not\to f$ in $\|\cdot\|_1$. 即有 $\|\cdot\|_1$ 不完备. □

1.44. 显然 $\|\cdot\|_1$ 为范数. 对 $\|\cdot\|_2$, 正定, 齐性显然.

$$\|f+g\|_2^2 = \int_0^1 (1+x)|f+g|^2$$
$$= \int_0^1 (1+x)f^2 + \int_0^1 (1+x)g^2 + 2\int_0^1 (1+x)fg$$
$$= \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2 + 2\int_0^1 \sqrt{1+x}\,f\,\sqrt{1+x}\,g$$
$$\le \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2 + 2\sqrt{\int_0^1 (1+x)f^2 \int_0^1 (1+x)g^2}$$
$$= \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2 + 2\|f\|_2\|g\|_2$$
$$= (\|f\|_2 + \|g\|_2)^2 \quad \therefore \|\cdot\|_2 \text{ 为范数.}$$

对 $\forall f \in C[0,1]$,

$$\|f\|_1^2 = \int_0^1 |f|^2 \le \int_0^1 (1+x)|f|^2 = \|f\|_2^2$$
$$\|f\|_2^2 = \int_0^1 (1+x)|f|^2 \le \int_0^1 2|f|^2 = 2\|f\|_1^2$$

$\therefore \|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 等价.

1.45. (1) 对 $\forall f \in BC[0,+\infty)$ 设 $|f| \le M < +\infty$

$$\therefore \int_0^{+\infty} e^{-ax}|f(x)|^2 dx \le M^2 \int_0^{+\infty} e^{-ax} = \frac{M^2}{a} < +\infty \quad \therefore \text{良定.}$$

正定, 齐次显然

$$\|f+g\|^2 = \int_0^{+\infty} e^{-ax}|f+g|^2$$
$$= \int_0^{+\infty} e^{-ax}f^2 + \int_0^{+\infty} e^{-ax}g^2 + 2\int_0^{+\infty} e^{-\frac{ax}{2}}f \cdot e^{-\frac{ax}{2}}g$$
$$\le \|f\|^2 + \|g\|^2 + 2\sqrt{\int_0^{+\infty} e^{-ax}f^2 \int_0^{+\infty} e^{-ax}g^2}$$
$$= \|f\|^2 + \|g\|^2 + 2\|f\|\|g\| = (\|f\| + \|g\|)^2$$

$\therefore \|\cdot\|$ 为范数.

(2). 不妨令 $a > b$. 令 $f_n(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, n-1] \\ x-n+1 & x \in [n-1, n] \\ 1 & x \ge n \end{cases}$

$$\therefore \|f_n\|_a^2 = \int_0^{+\infty} e^{-ax} f_n^2(x) \le \int_{n-1}^{+\infty} e^{-ax} = \frac{e^{-a(n-1)}}{a}$$
$$\|f_n\|_b^2 = \int_0^{+\infty} e^{-bx} f_n^2(x) \ge \int_n^{+\infty} e^{-bx} = \frac{e^{-bn}}{b}$$
$$\therefore \|f_n\|_b^2 / \|f_n\|_a^2 \ge e^{-bn+an-a} \cdot \frac{a}{b} \to +\infty \quad \text{as } n \to +\infty. \quad \square$$

1.4.6. 考虑 X 中的 Cauchy 列 (x_n, y_n), $x_n \in X_1$, $y_n \in X_2$.

∴ 对 $\forall \varepsilon$, $\exists N$, $\forall n, m > N$, $\|(x_n, y_n) - (x_m, y_m)\| < \varepsilon$.

∴ $\|(x_n, y_n) - (x_m, y_m)\| = \max\{\|x_n - x_m\|_1, \|y_n - y_m\|_2\} < \varepsilon$.

∴ $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ 也为 Cauchy 列

∴ $\exists\, x \in X_1$, $y \in Y$ s.t. $x_n \to x$, $y_n \to y$.

∴ $\|(x_n, y_n) - (x, y)\| = \max\{\|x_n - x\|_1, \|y_n - y\|_2\} \to 0$.

∴ X 为 B 空间

补：还需验证 $\|\cdot\|$ 为范数.

正定, 齐次显然. 对 (x_1, x_2), (y_1, y_2)

$$
\begin{aligned}
\|(x_1, x_2) + (y_1, y_2)\| &= \|(x_1 + y_1, x_2 + y_2)\| \\
&= \sup\{\|x_1 + y_1\|_1, \|x_2 + y_2\|_2\} \\
&\le \sup\{\|x_1\|_1 + \|y_1\|_1, \|x_2\|_2 + \|y_2\|_2\} \\
&\le \sup\{\|x_1\|_1, \|x_2\|_2\} + \sup\{\|y_1\|_1, \|y_2\|_2\} \\
&= \|(x_1, x_2)\| + \|(y_1, y_2)\| \quad \square
\end{aligned}
$$

1.4.7. $\Rightarrow$: 若 X 完备, 令 $y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$.

∴ $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ 收敛, 即 $\{y_n\}$ 收敛

∵ $\sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\| < +\infty$ ∴ 对 $\forall \varepsilon$, $\exists N$, $\forall n, m > N$,

$\sum_{i=n+1}^{m} \|x_i\| < \varepsilon$.

∴ $\|y_m - y_n\| = \|\sum_{i=n+1}^{m} x_i\| \le \sum_{i=n+1}^{m} \|x_i\| < \varepsilon$.

∴ $\{y_n\}$ 为 Cauchy 列 $\Rightarrow$ 收敛

$\Leftarrow$: 对任意 Cauchy 列 $\{y_n\}$.

∴ 取子列 $\{y_{n_k}\}$ 满足 $\|y_{n_k} - y_{n_{k-1}}\| < 2^{-k}$.

令 $x_k = \begin{cases} y_{n_1} & k = 1 \\ y_{n_k} - y_{n_{k-1}} & k \ge 2 \end{cases}$ ∴ $\|x_k\| < 2^{-k}$ $(k \ge 2)$.

即 $\sum_{k=1}^{+\infty} \|x_k\| < +\infty$ ∴ $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k = \lim_{n \to +\infty} y_{n_k}$ 收敛.

即 $\{y_n\}$ 存在一个收敛子列 ∴ $\{y_n\}$ 收敛, X 完备 $\square$