第一周作业答案

于俊骜

2024 年 9 月 9 日

1

证明收敛列有界且极限唯一。

证明. 先证明极限唯一。

假设收敛列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ 有两个极限 x_0, x_0'，则对于 $\varepsilon = \frac{1}{2}d(x_0, x_0') > 0$，$\exists N_1, N_2 > 0$，当 $n > N_1$ 时恒有

$$d(x_n, x_0) < \varepsilon$$

当 $n > N_2$ 时恒有

$$d(x_n, x`_0) < \varepsilon$$

于是，当 $n > \max\{N_1, N_2\}$ 时

$$d(x_0, x_0') \leq d(x_0, x_n) + d(x_0', x_n) < \frac{1}{2}d(x_0, x_0') + \frac{1}{2}d(x_0, x_0') = d(x_0, x_0')$$

矛盾！因此极限唯一。

沿用上面记号，对 $\varepsilon = 1$，$\exists N > 0$，当 $n > N$ 时恒有

$$d(x_n, x_0) < \varepsilon = 1$$

因此，对于任意 m，都有

$$d(x_m, 0) \leq d(x_m, x_0) + d(x_0, 0) \leq \max\left\{1, \max_{1 \leq i \leq n} d(x_i, x_0)\right\} + d(x_0, 0) < +\infty$$

即 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有界。 □

2

证明以下三条命题等价：

- A 是闭集；
- $\bar{A} = A$；
- 若 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$ 收敛于 x_0，则 $x_0 \in A$。

证明. ① $\Longrightarrow$ ② :

由 A 闭知 A^c 开，于是 $\forall x \in A^c$，$\exists \varepsilon > 0$，使得 $B_\varepsilon(x) \subset A^c$。这说明

$$A^c \cap \bar{A} = \varnothing \Longrightarrow \bar{A} \subset A \Longrightarrow \bar{A} = A$$

② $\Longrightarrow$ ③ :

由 $x_n \to x_0$ 知，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists x_n \in B_\varepsilon(x_0)$，这说明

$$B_\varepsilon(x_0) \cap A \neq \varnothing \Longrightarrow x_0 \in \bar{A} = A$$

③ $\Longrightarrow$ ① :

假设 A 不闭，则 A^c 不开，即 $\exists x_0 \in A^c$，使得

$$B_\varepsilon(x_0) \cap A = \varnothing,\ \forall \varepsilon > 0$$

我们取

$$x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x_0) \cap A$$

则 $x_n \to x_0$，但 $x_0 \notin A$，矛盾！ □

3

证明 $C[0,1]$ 可分。

证明. 由 Weierstrass 逼近定理，$[0,1]$ 上的实系数多项式在 $C[0,1]$ 上稠密。另一方面，取定

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \in \mathbb{R}[x]$$

而 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\{b_k\}_{k=0}^n$，使得 $|a_k-b_k|<\frac{1}{n+1}$。于是对于

$$g(x)=\sum_{k=0}^n b_k x^k\in\mathbb{Q}[x]$$

我们有

$$\sup_{x\in[0,1]}|f(x)-g(x)|=\sup_{x\in[0,1]}\left|\sum_{i=0}^n(a_k-b_k)x^k\right|\le\sum_{i=0}^n|a_k-b_k|<\varepsilon$$

因此，$[0,1]$ 上的有理系数多项式在 $C[0,1]$ 稠密。

最后只要证明 $\mathbb{Q}[x]$ 可数。记 A_n 为 n 次有理系数多项式，则

$$card(\mathbb{Q})=\aleph_0\Longrightarrow card(A_n)=\aleph_0^{n+1}=\aleph_0$$

因此

$$\mathbb{Q}[x]=\bigcup_{n=0}^\infty A_n$$

是可数集。 □

4

证明：映射 $T:X\to Y$ 连续当且仅当任意开集 $U\subset Y$，都有 $T^{-1}U$ 是 X 中开集。

证明. 记 $\mathcal{O}(X)$ 为 X 中开集的全体。

$\Longrightarrow$:

任意取定 $\forall U\in\mathcal{O}(Y)$，对于 $\forall x_0\in T^{-1}U$，$\exists\varepsilon>0$，使得

$$Tx_0\in U\Longrightarrow B_\varepsilon(Tx_0)\subset U$$

由连续性知，$\exists\delta>0$，当 $d(x,x_0)<\delta$ 时，恒有 $\rho(Tx,Tx_0)<\varepsilon$，这说明

$$B_\delta(x_0)\subset T^{-1}U\Longrightarrow T^{-1}U\in\mathcal{O}(X)$$

现在任取以 x_0 为极限的收敛列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$。对上述 $\delta>0$，$\exists N>0$，当 $n>N$ 时，我们有 $d(x_n,x_0)<\delta$。这说明 $Tx_n\to Tx_0$。

$\Longleftarrow$:

$\forall \varepsilon > 0$，我们有

$$T^{-1}(B_\varepsilon(x_0)) \in \mathcal{O}(X)$$

于是 $\exists \delta > 0$ 使得

$$B_\delta(x_0) \subset T^{-1}(B_\varepsilon(x_0))$$

从而只要 $d(x, x_0) < \delta$，就有 $\rho(Tx, Tx_0) < \varepsilon$。这说明 T 在 x_0 连续，结合 x_0 的任意性即得结论。 □

5

证明：映射 T 在 x_0 连续当且仅当任取 $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$，都有

$$x_n \to x_0 \Longrightarrow Tx_n \to Tx_0$$

证明. $\Longrightarrow$:

若 T 在 x_0 连续,$\forall \varepsilon > 0$,$\exists \delta > 0$,当 $d(x_n, x_0) < \delta$ 时,我们有 $\rho(Tx_n, Tx_0) < \varepsilon$。

现在任取以 x_0 为极限的收敛列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$。对上述 $\delta > 0$，$\exists N > 0$，当 $n > N$ 时，我们有 $d(x_n, x_0) < \delta$。这说明 $Tx_n \to Tx_0$。

$\Longleftarrow$:

假设 T 在 x_0 不连续,则 $\exists \varepsilon > 0$,$\exists x_n$ 使得 $d(x_n, x_0) < \frac{1}{n}$,但 $\rho(Tx_n, Tx_0) > \varepsilon$,矛盾！ □

6

证明离散度量空间完备。

证明. 对任取离散度量空间的一个 Cauchy 列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$，则对于 $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$，$\exists N > 0$，使得 $n > N$ 时

$$d(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon \Longrightarrow d(x_n, d_{n+p}) = 0 \Longrightarrow x_n = x_{n+p},\ \forall p > 0$$

这说明 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 以 x_{N+1} 为极限。 □