第40讲：Fourier变换及其性质与应用

(一) 复习：对$\forall f(x)\in L^2[a,b]$，只要作$T=2l=b-a$的周期开拓，就可将$f(x)$周期开拓到$\mathbb{R}$上，记此周期函数为$F(x)$，则

$$f(x)=F(x)\big|_{[a,b]}\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2n\pi x}{b-a}+b_n\sin\frac{2n\pi}{b-a}x\right)\xlongequal{\text{均方}}f(x),\ x\in[a,b].$$

且有Parseval等式：$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f^2(x)dx=\frac{2}{b-a}\int_a^b f^2(x)dx.$

其中，
$$\begin{cases}a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}F(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx=\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\cos\frac{2n\pi x}{b-a}dx & (n\geq 0)\\ b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}F(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx=\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\sin\frac{2n\pi}{b-a}x\,dx & (n\geq 1)\end{cases}$$

(二) 定义在$(-\infty,+\infty)$上的函数$f(x)$的付氏展开问题

(1°) 取$l>0$，先考察$[-l,l]$上$f_l(x)\triangleq f(x)\big|_{[-l,l]}$的付氏展开：

$$f_l(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)\xlongequal[\text{的C点}]{\text{若}x\text{是}f}f_l(x),\ x\in[-l,l].\ (*_1)$$

(2°) 再讨论$l\to+\infty$时$f_l(x)$的付氏展开问题。为了使讨论可顺利进行，可设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上可积且绝对可积，即

即设 $\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx\right|<+\infty$，$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx<+\infty$ 且 f 在 $\forall[a,b]\subset R$ 中逐段光滑。

在 $f_l(x)$ 的付氏级数(※1)中，若令 $\omega=\pi/l$，则

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f_n(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos n\omega t\,dt \quad (n\geq 0)$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f_n(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\sin n\omega t\,dt \quad (n\geq 1)$$

在 $f(x)$ 的连续点 x 处，

(注：$\because \left|\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx\right|\leq\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx$，故只要 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 中绝对可积，必有 $\left|\int_{-\infty}^{+\infty}f\,dx\right|<+\infty$)

$$f_l(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega x+b_n\sin n\omega x)$$

$$=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)dt+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)(\cos n\omega t\cos n\omega x+\sin n\omega t\sin n\omega x)dt$$

$$=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)dt+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos n\omega(t-x)dt \quad (※2)$$

令 $\lambda_n=n\omega$，则 $\Delta\lambda_n=\lambda_n-\lambda_{n-1}=n\omega-(n-1)\omega=\omega=\frac{\pi}{l}$，从而有：

$$f_l(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)dt+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{-l}^{l}f(t)\cos\lambda_n(t-x)dt\right)\Delta\lambda_n$$

当 $l\to+\infty$ 时，$f_l(x)\to f(x)$，$\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)dt\to 0$，而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\lambda_n(t-x)dt\,\Delta\lambda_n\longrightarrow\int_0^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\lambda(t-x)dt\right)d\lambda$$

从而在 f 的连续点处，有：

$$f(x)=\frac{\int_0^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\lambda(t-x)dt\right)d\lambda}{\pi}=\int_0^{+\infty}(a(\lambda)\cos\lambda x+b(\lambda)\sin\lambda x)d\lambda \quad (※3)$$

(2). ②.

其中，$\begin{cases} a(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\lambda t\,dt \\ b(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\lambda t\,dt \end{cases}$

(注：$|a(\lambda)|\le\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)\cos\lambda t|dt\le\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|dt<+\infty$，$|b(\lambda)|\le$
$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)\sin\lambda t|dt\le\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|dt<+\infty$)

(※3)称为$(-\infty,+\infty)$上可积且绝对可积函数$f(x)$的傅氏积分公式。从而可知，对于有限区间$[a,b]$上可积且平方可积的函数$f(x)$，都有Fourier级数展开式；而在$(-\infty,+\infty)$中可积且绝对可积的函数$f(x)$，由于无法变成周期函数，因此无法用傅氏级数表示，但(※3)告诉我们：这样的$f(x)$可用$f(x)$的傅氏积分表示：$f(x)=\int_{0}^{+\infty}(a(\lambda)\cos\lambda x+b(\lambda)\sin\lambda x)d\lambda$

(三)傅氏变换的有关概念：

利用Euler公式：$\cos\theta=(e^{i\theta}+e^{-i\theta})/2$ 可将傅氏积分(※3)化为：$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)(e^{i\lambda(t-x)}+e^{-i\lambda(t-x)})dt\,d\lambda$

$=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\lambda(t-x)}dt\,d\lambda+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{i\lambda(t-x)}dt\,d\lambda$

$=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\lambda(t-x)}dt\,d\lambda+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\lambda(t-x)}dt\,d\lambda$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\lambda(t-x)}dt\right)d\lambda=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\lambda t}dt\right)e^{i\lambda x}d\lambda$$

令 $F(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\lambda t}dt$，则 $f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda$

称 $F(\lambda)$ 是函数 $f(t)$ 的 Fourier 变换，记作 $F(f(t))=F(\lambda)$

而 $f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda$ 称之为 $F(\lambda)$ 的逆 Fourier 变换.

记作 $F^{-1}(F(\lambda))=f(t)$，$t\in(-\infty,+\infty)$. 并称

$$\begin{cases}F(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\lambda t}dt\\ f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda\end{cases}$$ (**) 是付氏变换对.

有些教材上，把付氏变换对写成对称形式：

$$\begin{cases}F(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\lambda t}dt\\ f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda\end{cases}$$ (*5)

(四) 例题：

例1. 求 $f(x)=\frac{1}{a^2+x^2}$ $(a>0)$ 的 Fourier 积分：$x\in(-\infty,+\infty)$

例2. 求 $f(x)=\begin{cases}e^{-\beta x}, & (x\geq 0,\ \beta>0,\ 常)\\ 0, & x<0\end{cases}$ 的 Fourier 变换.

例3. 求 $f(x)=\begin{cases}1 & |x|<a\\ \frac{1}{2} & |x|=a\\ 0 & |x|>a\end{cases}$ 的 Fourier 变换.

解例1. (1°) ∵ $f(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上的偶函数，∴ $b(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\lambda t\,dt$

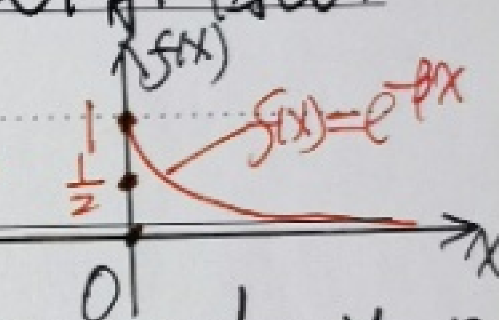
$=\lim_{h\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-h}^{h} f(t)\sin\lambda t\,dt=\lim_{h\to+\infty}0=0$. 且 $a(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda t\,dt$

$=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(t)\cos\lambda t\,dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\cos\lambda t}{a^2+t^2}dt=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2a}e^{-a\lambda}\right)=\frac{1}{a}e^{-a\lambda}$

注: $\begin{cases} I(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos\beta t}{\alpha^2+t^2}dt=\frac{\pi}{2\alpha}e^{-\alpha\beta}, & (\alpha>0,\beta\geq 0) \\ J(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{t\sin\beta t}{\alpha^2+t^2}dt=\frac{\pi}{2}e^{-\alpha\beta}, & (\alpha>0,\beta>0) \end{cases}$ 为Ch13中的Laplace积分

(2°) ∵ $f(x)=\frac{1}{a^2+x^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 中处处C 且分段光滑，因此，

$f(x)$ 的傅氏积分处处收敛于 $f(x)$ 本身，即



$f(x)\sim\int_0^{+\infty}a(\lambda)\cos\lambda x\,d\lambda=\int_0^{+\infty}\frac{1}{a}e^{-a\lambda}\cos\lambda x\,d\lambda\overset{\text{处处}}{=\!=}f(x)=\frac{1}{a^2+x^2}$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

解例2. (1°) $F(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\lambda x}dx=\int_{-\infty}^{0}0\,dx+\int_0^{+\infty}e^{-\beta x}e^{-i\lambda x}dx$

$=\int_0^{+\infty}e^{-(\beta+i\lambda)x}dx=\frac{-1}{\beta+i\lambda}e^{-(\beta+i\lambda)x}\Big|_0^{+\infty}=\frac{-1}{\beta+i\lambda}(0-1)=\frac{1}{\beta+i\lambda}$

($\because\ |e^{-(\beta+i\lambda)x}|=e^{-\beta x}|e^{-i\lambda x}|=e^{-\beta x}|\cos\lambda x+i\sin\lambda x|=e^{-\beta x}\cdot 1\xrightarrow[\beta>0]{x\to+\infty}0$

$\therefore\ \lim_{x\to+\infty}e^{-(\beta+i\lambda)x}=0$) 故 $F(\lambda)=\frac{\beta-i\lambda}{\beta^2+\lambda^2}$ (实变量λ的复值函数)

当 $x>0$ 时, f 处处C，从而 $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda=f(x)=e^{-\beta x}$

即 $\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\beta-i\lambda}{\beta^2+\lambda^2}\right)e^{i\lambda x}d\lambda=2\pi f(x)=2\pi e^{-\beta x}$, 且 $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\beta-i\lambda}{\beta^2+\lambda^2}e^{i\lambda x}d\lambda=\begin{cases}f(x), & x\neq 0\\ \frac{1}{2}, & x=0\end{cases}$

(三) 作业: ex12.4/ 1(1),(2),(3); 3(1),(2).

附：Fourier变换的三种形式及"对偶性"

(一) 傅氏变换的三种常见形式：

设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对可积，且在 $\forall[a,b]$ 中分段光滑，则 $f(x)$ 的傅氏积分为

$$f(x)\sim\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\lambda(t-x)\,dt\,d\lambda\overset{\text{处处}}{=}\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2},\ \forall x\in R$$ (式1)

当 x 是 $f(x)$ 的连续点时，有

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\frac{e^{i\lambda(t-x)}+e^{-i\lambda(t-x)}}{2}\,dt\,d\lambda$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\lambda(t-x)}\,dt\,d\lambda$$ (式2)

若令 $F(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\lambda t}dt$，则 $f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda$，(式3)

若令 $F(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\lambda t}dt$，则 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda$，(式4)

若将(式1)中的 $\cos\lambda(t-x)$ 写成 $\cos\lambda(x-t)=\frac{e^{i\lambda(x-t)}+e^{-i\lambda(x-t)}}{2}$

则有 $F(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{i\lambda t}dt$，$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\lambda)e^{-i\lambda x}d\lambda$.(式5)

(式3)，(式4)，(式5)即为傅氏变换的三种常见形式。

像函数，　　　　本函数

(二) 付氏变换的主要性质（本课程采用(8)作为付氏变换的公式，并且记 $F(\lambda)=\mathcal{F}(f(x))$; $\mathcal{F}^{-1}(F(\lambda))=f(x)$）

(1).（付氏变换是线性变换）：设 $f(x), g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的付氏变换分别为：$F(\lambda)=\mathcal{F}(f(x))$，$G(\lambda)=\mathcal{F}(g(x))$. C_1, C_2 为任意常数，则：

$$\begin{cases} \mathcal{F}(C_1 f(x)+C_2 g(x))=\int_{-\infty}^{+\infty}(C_1 f(x)+C_2 g(x))e^{-i\lambda x}dx=C_1F(\lambda)+C_2G(\lambda) \\ C_1 f(x)+C_2 g(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(C_1F(\lambda)+C_2G(\lambda))e^{i\lambda x}d\lambda \end{cases}$$

事实上，一切积分变换：$H(\lambda)\triangleq\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)K(x,\lambda)dx$ 都是线性变换，其中 $K(x,\lambda)$ 称为积分变换的核(心)函数。并且一切积分变换的逆变换（若存在），也都是线性变换。

(2). 像函数 $F(\lambda)$ 的奇偶性与本函数 $f(x)$ 的奇偶性相同：

(1) 若 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的偶函数．则 $F(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\lambda x}dx$

$=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)(\cos\lambda x+i\sin\lambda x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos\lambda x\,dx+0=2\int_0^{+\infty}f(x)\cos\lambda x\,dx$

$\triangleq F_c(\lambda)$．称 $F_c(\lambda)=2\int_0^{+\infty}f(x)\cos\lambda x\,dx$ 为 $f(x)$ 的余弦变换．

(2°) 若$f(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的奇函数，则 $F(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\lambda x}dx$

$=\int_{-\infty}^{+\infty}(f(x)\cos\lambda x-if(x)\sin\lambda x)dx=0-2i\int_{0}^{+\infty}f(x)\sin\lambda x dx\triangleq iF_s(\lambda)$.

其中$F_s(\lambda)=2\int_0^{+\infty}f(x)\sin\lambda x dx$ 称为$f(x)$的正弦变换.

显然，$F_c(\lambda)$是偶函数，$F_s(\lambda)$是奇函数．因此，付氏变换

将时间域$(-\infty,+\infty)$上的偶(奇)函数变换成频率域上的偶(奇)函数。

(3).(频移特性)：设$F(f(x))=F(\lambda)$，λ是频率．则$\forall\lambda_0\in R$．有

$F(e^{-i\lambda_0 x}f(x))=F(\lambda+\lambda_0)$

(4). 设$F(f(x))=F(\lambda)$，$F(f'(x))$存在．则 $F(f'(x))=i\lambda F(\lambda)$.

若$F(f''(x))$，$F(f^{(3)}(x))$，$\cdots F(f^{(m)}(x))$都存在，则 且$f^{(i)}(\pm\infty)=0$，$i=0,1,2,\cdots m-1$

时，有$F(f^{(m)}(x))=(i\lambda)^m F(\lambda)=(i\lambda)^m F(f(x))$，$m=1,2,3,\cdots$

(5). 称积分：$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x-t)g(t)dt$ 为$f(x)$，$g(x)$的卷积，记作$f(x)*g(x)$

$=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x-t)g(t)dt$．$x\in R$．若$F(f(x))=F(\lambda)$，$F(g(x))=G(\lambda)$，$\lambda\in R$.

则 $F(f(x)*g(x))=F(\lambda)\cdot G(\lambda)\Leftrightarrow f(x)*g(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\lambda)\cdot G(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda$ (※)

~~付氏变换的神奇之处是它可将卷积化成普通的乘积。~~

(※)称为付氏变换的卷积定理。

(3)

(6).(微分特性)：若 $F(f(x))=F(\lambda)$，则 $F'(\lambda)=F(-ixf(x))$

(7).(parseval等式)：若 $F(f(x))=F(\lambda)$，则公明：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\lambda)|^2 d\lambda \qquad (\text{略})$$

证性质(3)：$\because F(f'(x))=\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)e^{-i\lambda x}dx=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda x}df(x)=f(x)e^{-i\lambda x}\Big|_{-\infty}^{+\infty}$

$+\int_{-\infty}^{+\infty}(i\lambda)^1 f(x)e^{-i\lambda x}dx=0+(i\lambda)^1\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\lambda x}dx=(i\lambda)^1F(\lambda)$；

$F(f''(x))=\int_{-\infty}^{+\infty} f''(x)e^{-i\lambda x}dx=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda x}df'(x)=(f'(x)e^{-i\lambda x})\Big|_{-\infty}^{+\infty}+\int_{-\infty}^{+\infty}(i\lambda)e^{-i\lambda x}f'(x)$

$=0+(i\lambda)^1\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda x}df(x)=(i\lambda)e^{-i\lambda x}f(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}+(i\lambda)^2\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\lambda x}dx$

$=0+(i\lambda)^2F(\lambda)$；…… 同理，$F(f^{(m)}(x))=(i\lambda)^m F(\lambda)$，$m=1,2,3,\cdots$

看作广义无界区域上的二重积分！

证性质(5)：$\because F(f(x)*g(x))=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt\right)e^{-i\lambda x}dx$

$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)e^{-i\lambda x}dtdx \xlongequal{\text{换序}} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)e^{-i\lambda x}dxdt$

$=\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)e^{-i\lambda x}dx\right)dt \xlongequal[x=t+u,\ dx=du]{\text{令 } x-t=u \text{ 则}}$

$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-i\lambda(t+u)}du\right)dt$

$=\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-i\lambda t}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-i\lambda u}du\right)dt=\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-i\lambda u}du\left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-i\lambda t}dt\right)$

$=F(\lambda)\cdot G(\lambda)$.

(4).

$\because f(x)*g(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\lambda)G(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda$

证明性质(6). $F'(\lambda)=\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\lambda x}dx\right)'_{\lambda}=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(f(x)e^{-i\lambda x}\right)'_{\lambda}dx$

$=\int_{-\infty}^{+\infty}(-ix)f(x)e^{-i\lambda x}dx=F(-ixf(x))$

证明性质(7)：令 $g(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x+t)f(t)dt$，$x\in R$，则 $g(x)$ 在 R

上连续，且 $F(g(x))=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(x+t)f(t)dt\right)e^{-i\lambda x}dx$

$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x+t)f(t)e^{-i\lambda x}dt\,dx$（看作无穷矩形上的二重积分）

$\overset{换序}{=}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x+t)f(t)e^{-i\lambda x}dx\,dt$

$=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\int_{-\infty}^{+\infty}f(x+t)e^{-i\lambda x}dx\,dt\ \overset{令x+t=u}{\underset{则x=u-t}{=\!=\!=}}$

$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)e^{-i\lambda(u-t)}du\,dt$

$=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{i\lambda t}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)e^{-i\lambda u}du\,dt$

$=\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)e^{-i\lambda u}du\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{i\lambda t}dt\right)=F(\lambda)\cdot\overline{F(\lambda)}=|F(\lambda)|^2$

$\therefore g(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x+t)f(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\lambda)|^2e^{i\lambda x}d\lambda$，令 $x=0$ 则

$\int_{-\infty}^{+\infty}f^2(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\lambda)|^2d\lambda$

(5).

(三)例题：求 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1\\ 0, & |x|\geq 1\end{cases}$ 的付氏变换，并证明：

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha\cos\alpha x}{\alpha}d\alpha=\begin{cases}\frac{\pi}{2} & |x|<1\\ \frac{\pi}{4} & |x|=1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$$ (ex12.4/4)

进而证明 Dirichlet 积分：$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$.

解(1) f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对可积且在 $\forall[a,b]$ 上分段光滑.

(2) $F(\lambda)=F(f(x))=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\lambda x}dx=\int_{-1}^{1}1(\cos\lambda x-i\sin\lambda x)dx=\int_{-1}^{1}\cos\lambda x dx$

$=2\int_0^1\cos\lambda x dx=\frac{2\sin\lambda}{\lambda}$ ($f(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow F(\lambda)=\frac{2\sin\lambda}{\lambda}$ 也是偶函数)

(3) $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2\sin\lambda}{\lambda}(\cos\lambda x+i\sin\lambda x)d\lambda$

$=\frac{1}{\cancel{2}\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cancel{2}\sin\lambda\cos\lambda x}{\lambda}d\lambda+0\overset{\text{处处}}{=\!=}\begin{cases}1, & |x|<1\\ \frac{1}{2}, & |x|=1\\ 0 & |x|>1\end{cases}\Leftrightarrow$

$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda\cos\lambda x}{\lambda}d\lambda=\begin{cases}1, & |x|<1\\ 1/2, & |x|=1\\ 0 & |x|>1\end{cases}\Leftrightarrow\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha\cos\alpha x}{\alpha}d\alpha=\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & |x|<1\\ \frac{\pi}{4}, & |x|=1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$

令 $x=0$ 得：$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha}{\alpha}d\alpha=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$.

~~(四)作业：ex12.4/3, 4, 5. 并证明付氏变换的卷积定理与Parseval等式。~~