第46讲：反常积分复习与小结（一）

第13章的重点是反常积分的收敛性判断与用含参反常积分构造新型的函数，其中，以Gamma函数

$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}dt$，$(x>0)$；$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$，$(x>0,y>0)$

（Beta函数）最为典型。下面利用6个例题将有关内容进行一次复习与小结。

例1. 证明Γ函数的余元公式：

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a)=\frac{\pi}{\sin a\pi},\quad \forall a\in(0,1).$$

证：(1°) 先将偶函数$f(x)=\cos ax$ $(0<a<1)$在$[-\pi,\pi]$上进行Fourier级数展开：$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx dx\equiv 0$，$(n\geq 1)$；

$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos ax=\frac{2\sin a\pi}{a\pi}$；$n\geq 1$时，$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx$

$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos ax\cos nx dx=(-1)^n\frac{\sin a\pi}{\pi}\left(\frac{1}{a+n}+\frac{1}{a-n}\right)$.

而以$f(x)$经过$T=2\pi$的周期开拓后的周期函数$F(x)$在$(-\infty,+\infty)$中处处连续且分段光滑可知：

(1)

对 $\forall x\in[-\pi,\pi]$，$f(x)$ 的 Fourier 级数处处收敛于

(且绝对、一致收敛于 $f(x)$！)——Dirichlet收敛定理

$f(x)$，即得.

$f(x)=\cos ax=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$．即对 $\forall x\in[-\pi,\pi]$，

$$\cos ax=\frac{\sin a\pi}{\pi a}+\frac{\sin a\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{a+n}+\frac{1}{a-n}\right)\cos nx.$$

特别地，取 $x=0$ 可得：

$$\cos a0=1=\frac{\sin a\pi}{\pi}\left[\frac{1}{a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{a+n}+\frac{1}{a-n}\right)\right]\Longleftrightarrow$$

$$\frac{1}{a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{a+n}+\frac{1}{a-n}\right)=\frac{\pi}{\sin a\pi},\ \forall a\in(0,1).\quad (*1)$$

(III). 从 $\Gamma(1)=1\Longrightarrow\Gamma(a)\Gamma(1-a)=B(a,1-a)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^{a-1}}{1+x}dx$

而在第13章第5讲的例(6)可知，当 $a\in(0,1)$ 时.

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{a-1}}{1+x}dx=\int_0^1\frac{x^{a-1}}{1+x}dx+\int_1^{+\infty}\frac{x^{a-1}}{1+x}dx$$

且 $\displaystyle\int_0^1\frac{x^{a-1}}{1+x}dx=\int_0^1 x^{a-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n dx=\int_0^1\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{n+a-1}\right)dx$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^1 x^{n+a-1}dx=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{a+n}=\frac{1}{a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a+n}\quad(*2)$$

$$\int_1^{+\infty}\frac{x^{a-1}}{1+x}dx\xlongequal{u=\frac{1}{x}}\int_0^1\frac{u^{-a}}{1+u}du=\int_0^1\frac{x^{(1-a)-1}}{1+x}dx\xlongequal{(*2)}$$

(2).

$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{1-a+n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{a-(n+1)}\xlongequal{n+1=m}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{a-m}$,

即 $\int_1^{+\infty}\frac{x^{a-1}}{1+x}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a-n}$, $\int_0^1\frac{x^{a-1}dx}{1+x}=\frac{1}{a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a+n}$.

于是, $\int_0^{+\infty}\frac{x^{a-1}}{1+x}dx=\frac{1}{a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{a+n}+\frac{1}{a-n}\right)=\Gamma(a)\Gamma(1-a)$.

综合(I),(II)可得: Γ(a)的余元公式:

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a)=\frac{\pi}{\sin\pi a},\ \forall a\in(0,1). \quad (式3)$$

通过余元公式, 当 $\Gamma(a)$ 已知时, $\Gamma(1-a)=\frac{\pi}{\Gamma(a)\sin\pi a}$ 也可知.

例2. 证明 $\Gamma(x)$ 的 Legendre 加倍公式:

$$\Gamma(2x)=\frac{2^{2x-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right),\ \forall x>0 \quad (式4)$$

证: ∵ $B(x,x)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{x-1}dt=\int_0^1(t(1-t))^{x-1}dt$

$=\int_0^1\left[\frac{1}{4}-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2\right]^{x-1}dt$ $\xlongequal{以t=\frac{1}{2}}\int_0^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{4}-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2\right]^{x-1}dt$

$=\int_0^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{4}-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2\right]^{x-1}dt+\int_{\frac{1}{2}}^1\left[\frac{1}{4}-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2\right]^{x-1}dt$

$=2\int_0^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{4}-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2\right]^{x-1}dt\xlongequal{t-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{s}}\frac{1}{2^{2x-1}}\int_0^1 s^{-\frac{1}{2}}(1-s)^{x-1}ds$

(注: $\int_0^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{4}-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2\right]^{x-1}dt\xlongequal{令\frac{1}{2}-t=u}\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}-u^2\right)^{x-1}du$

②. $\int_{\frac{1}{2}}^1\left[\frac{1}{4}-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2\right]^{x-1}dt\xlongequal{令t-\frac{1}{2}=u}\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}-u^2\right)^{x-1}dt$

$$=\frac{1}{2^{2x-1}}\int_0^1 s^{\frac{1}{2}-1}(1-s)^{x-1}ds=\frac{1}{2^{2x-1}}B\left(\frac{1}{2},x\right)$$，即

$$B(x,x)=\frac{1}{2^{2x-1}}B\left(\frac{1}{2},x\right)$$，即：

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(x)}{\Gamma(x+x)}=\frac{1}{2^{2x-1}}\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(x)}{\Gamma(\frac{1}{2}+x)}\xlongequal{\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2x-1}}\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2}+x)}\Leftrightarrow$$

$$\Gamma(2x)=\frac{2^{2x-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right),\ \forall x>0.$$

例3，证明半径为a的n维球体$\Omega_n(a)$：

$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\le a^2$ $(a>0)$ 的体积$V(\Omega_n(a))$有统一

表达式：$$V(\Omega_n(a))=\frac{a^n\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)},\ \forall n\in N^*$$ (*)

证：(I) $$V(\Omega_n(a))=\int\int\cdots\int_{\Omega_n(a)}dx_1dx_2\cdots dx_n$$

线性变换：

$x_1=au_1, x_2=au_2,\cdots,x_n=au_n$

$$\int\int\cdots\int_{u_1^2+u_2^2+\cdots+u_n^2\le 1}a^n du_1du_2\cdots du_n=a^nV(\Omega_n(1))$$

$V(\Omega_n(1))$是一个恒定的常数。

(4).

(II). $V(\Omega_n(1)) = \iint\limits_{u_{n-1}^2+u_n^2\le 1} du_{n-1}du_n \int\int\cdots\int\limits_{u_1^2+\cdots+u_{n-2}^2\le 1-u_{n-1}^2-u_n^2} du_1du_2\cdots du_{n-2}$

$$= \iint\limits_{u_{n-1}^2+u_n^2\le 1} (1-u_{n-1}^2-u_n^2)^{\frac{n-2}{2}} V(\Omega_{n-2}(1))\, du_{n-1}du_n \xrightarrow[u_n=r\sin\theta]{u_{n-1}=r\cos\theta}$$

$$V(\Omega_{n-2}(1))\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 (1-r^2)^{\frac{n-2}{2}} r\,dr = \frac{2\pi}{n}V(\Omega_{n-2}(1))$$

即 $V(\Omega_n(a)) = \frac{2\pi a^n}{n}V(\Omega_{n-2}(1))$, $n=3,4,5,\cdots$

利用 $V(\Omega_1(1))=2$, $V(\Omega_2(1))=\pi\cdot 1^2=\pi \Rightarrow$

$$V(\Omega_n(a)) = \begin{cases} \dfrac{a^{2k-1}2^k\pi^{k-1}}{(2k-1)!!} & n=2k-1, \\ \dfrac{a^{2k}\pi^k}{k!} & n=2k \end{cases} \quad ,k=1,2,3,\cdots$$

(III). 利用 $\Gamma(x)$ 进行统一表示.

(1) $n=2k$ 时, $V(\Omega_n(a)) = \dfrac{a^n\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(k+1)} = \dfrac{a^n\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$

(2) $n=2k-1$ 时.

$$V(\Omega_n(a)) = \frac{a^{2k-1}\pi^{k-1}\,\Gamma(\frac{1}{2})}{\frac{(2k-1)}{2}\frac{(2k-3)}{2}\frac{(2k-5)}{2}\cdots\frac{5}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\,\Gamma(\frac{1}{2})}$$

(5).

$$= \frac{a^{2k-1}\pi^{k-1}\pi^{\frac{1}{2}}}{\frac{2k-1}{2}\Gamma(\frac{2k-1}{2})} = \frac{a^{2k-1}\pi^{k-\frac{1}{2}}}{\Gamma(k+\frac{1}{2})}$$

$$\xlongequal[k+\frac{1}{2}=\frac{n}{2}+1]{n=2k-1,\ k-\frac{1}{2}=\frac{n}{2}} \frac{a^n\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$$，即对 $\forall n\in N^*$,

总有：$V(\Omega_n(a)) = \dfrac{a^n\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$，$n=1,2,3,\cdots$

特别地，$n=3$时，$V(\Omega_3(a)) = a^3\pi^{\frac{3}{2}}/\Gamma(\frac{3}{2}+1) =$
$a^3\pi^{\frac{3}{2}}/\frac{3}{2}\Gamma(\frac{3}{2}) = a^3\pi^{\frac{3}{2}}/\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = a^3\pi^{\frac{3}{2}}/\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$
$=\frac{4}{3}\pi a^3$；$n=4$时，$V(\Omega_4(a)) = a^4\pi^2/\Gamma(\frac{4}{2}+1) = \frac{a^4\pi^2}{2!}$；

$n=6$时，$V(\Omega_6(a)) = a^6\pi^3/\Gamma(4) = a^6\pi^3/3!$，$\cdots$

例4. Euler的$\Gamma(x)$与Riemann的$\zeta(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$，$(x>1)$

(I). 设$f(x)$是2π周期函数，且$f(x)=|x|$，$|x|\le\pi$，求

$f(x)$的Fourier级数；

(II) 求$\zeta(2)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$，$\zeta(4)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$，与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}$.

(6).

解(1)：由于 $f(x)$ 是偶函数，故 $b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$

$=0$，$\forall n\geq 1$。$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\,dx=\pi$。

$n\geq 1$ 时，$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,dx$

$=\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}x\,d\sin nx=\frac{2}{\pi}\left(\frac{(-1)^n-1}{n^2}\right)=\begin{cases}\frac{-4}{\pi(2m+1)^2}, & n=2m+1\\ 0, & n=2m.\end{cases}$

$\because f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上处处连续，并且在任何有限区间上逐段光滑，$\therefore$ 依 Dirichlet 收敛定理，$f(x)$ 的傅氏级数：

$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\cos(2m+1)\pi x}{(2m+1)^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$

上绝对且一致收敛于 $f(x)$。特别地，当 $x\in[-\pi,\pi]$ 时，

$\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\cos(2m+1)\pi x}{(2m+1)^2}=|x|$。 (★6)

取 $x=0$，则得：$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$，即 $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots$

$=\frac{\pi^2}{8}$，设 $A=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 绝对收敛，且

$A=\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots\right)=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}A$，

(7)。

由此解得 $A=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$.

由Parseval等式:

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx \Longrightarrow$$

$$\frac{\pi^2}{2}+\frac{16}{\pi^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^4}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|^2dx=\frac{2}{3}\pi^2 \Longrightarrow$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^4}=\frac{\pi^4}{96}=\frac{1}{1^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\cdots$$

设 $A_0=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ 绝对收敛. 因此,有

$$A_0=\left(\frac{1}{1^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\cdots\right)+\left(\frac{1}{2^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{6^4}+\cdots\right)$$
$$=\frac{\pi^4}{96}+\frac{1}{16}A_0$$，解得 $A_0=\zeta(4)=\frac{\pi^4}{90}$.

将(**)在 $[0,x]\subset[0,\pi]$ 上逐次积分,然后用 π 代替 x，可先求出 $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^n}$，$n=4,6,8,10,\cdots$ 的值,进而可求得 $\zeta(n)$ 的值, $n=4,6,8,10,\cdots$

(8).

显然，有：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}=\frac{\pi^4}{96}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{8}-\frac{1}{4}\frac{\pi^2}{6}=\frac{\pi^2}{12},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^4}=\frac{\pi^4}{96}-\frac{1}{16}\frac{\pi^4}{90}.$$

$f(x)$的Fourier级数的Parseval等式：

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx \qquad (式7)$$

实现了离散求和与连续求和的相互转换。

此外，在复变函数中，Γ函数定义为：

$$\Gamma(z)=\int_0^{+\infty}t^{z-1}e^{-t}dt \quad (\mathrm{Re}(z)>0). \qquad (式8)$$

ζ函数定义为：$\zeta(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z}$，$(\mathrm{Re}(z)>1)$， (式9)

可以证明，这两个复数域上的特殊函数之间有关系：

$$\zeta(z)=\frac{1}{\Gamma(z)}\int_0^{+\infty}\frac{x^{z-1}}{e^x-1}dx \qquad (式10)$$

（以后给出证明）

(9). 用含参变量积分与指数函数构造的函数，最有名的是$\Gamma(x)$。
用自然数项无穷级数求和构造的函数，最有名的是$\zeta(x)$。

在这里，$\int(\xi)$是连续求和的，$\sum(\xi)$是离散求和的。但通过(例10)，离散求和与连续求和自然实现了相互转换。

在上一讲中的一致收敛反常积分的分析性质中3的证明，也是把连续求和的反常积分 $\int_a^{+\infty}\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}dx$ 转换成函数项无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty}g_n(u)$ 来完成的。

在下面的例5中，我们仍要将反常积分的收敛性转化为无穷级数的收敛性。

例5. 证明：反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x\,dx}{1+x^6\sin^2x}$ 收敛。

证：$\because \int_0^{+\infty}\frac{x\,dx}{1+x^6\sin^2x}=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{x\,dx}{1+x^6\sin^2x}$，

而 $a_n\triangleq\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{x\,dx}{1+x^6\sin^2x}\le\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{(n+1)\pi}{1+n^6\sin^2x}dx=\int_0^{\pi}\frac{(n+1)\pi\,dx}{1+n^6\sin^2x}$

$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(n+1)\pi\,dx}{1+n^6\sin^2x}\le 2(n+1)\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\cos^2x+n^6\sin^2x}$

即 $0\le a_n\le \frac{2(n+1)\pi}{n^3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\tan x(n^3)}{1+(n^3\tan x)^2}$

$=\frac{2(n+1)\pi}{n^3}\arctan(n^3\tan x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2(n+1)\pi}{n^3}\times\frac{\pi}{2}$

$=\pi^2(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3})$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3})$ 收敛. 故 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 收敛.

即 $\int_0^{+\infty}\frac{x\,dx}{1+x^6\sin^2 x}$ 收敛，且是绝对收敛。

例6. (I). 证明 $\Gamma(x)\in C^{\infty}(0,+\infty)$, (数1)

(II). 证明 $B(x,y)\in C^{\infty}(D_1)$. $D_1\begin{cases}x>0\\y>0\end{cases}$, (数2)

证(I). 即要证明 $\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}dt$ 在收敛域 $(0,+\infty)$ 中有任意阶连续导数. 即 $\Gamma^{(n)}(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 中存在连续. $\forall n\in N^*$.

(1°) 在上一讲的例1中, 对 $\forall x_0\in(0,+\infty)$, $\exists[a,b]\subset(0,+\infty)$

(1)

设 $x_0\in(a,b)$ 且 $\Gamma'(x)=(\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}dt)'_x=$

$\int_0^{+\infty}(t^{x-1}e^{-t})'_x dt=\int_0^{+\infty}t^{x-1}\ln t\, e^{-t}dt$ 在 $[a,b]$ 中一致 con.

又 $t^{x-1}\ln t\, e^{-t}$ 在 $[a,b]$ 中连续. 从而, $\Gamma(x)$ 在 $[a,b]$

中可导且 $\Gamma'(x)$ 在 $[a,b]$ 中连续 $\Rightarrow \Gamma'(x)$ 在 x_0 处存在

且连续. 再由 x_0 在 $(0,+\infty)$ 中的任意性显知, $\Gamma'(x)$ 在

$(0,+\infty)$ 中存在且连续. 即结论对 $n=1$ 时成立;

设结论对 $n=m$ $(m\geq 2)$ 时成立, 即

$\Gamma^{(m)}(x)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}(\ln t)^m e^{-t}dt$ 在 $(0,+\infty)$ 中存在且连续;

要证 $\int_0^{+\infty}t^{x-1}(\ln t)^{m+1}e^{-t}dt$ 在 $(0,+\infty)$ 中存在且连续.

对 $\forall x_0\in(0,+\infty)$, $\exists [a,b]\subset(0,+\infty)$, 使 $x_0\in(a,b)$.

(1) 在 $\int_0^1 t^{x-1}(\ln t)^{m+1}e^{-t}dt$ 中, 对 $\forall x\in[a,b]$, 有

$|t^{x-1}(\ln t)^{m+1}e^{-t}|\leq t^{a-1}|\ln t|^{m+1}$ 且

$\lim\limits_{t\to 0^+}t^{a-1}|\ln t|^{m+1}\Big/\frac{1}{t^{1-\frac{1}{2}a}}=\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{|\ln t|^{m+1}}{t^{-\frac{1}{2}a}}\xlongequal{t=\frac{1}{u}}\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{(\ln u)^{m+1}}{u^{\frac{1}{2}a}}$

(2). $\because \Gamma''(x)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}(\ln t)^2e^{-t}dt>0$, $\forall x\in(0,+\infty)\Rightarrow\Gamma(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 中为下凸函数.

$=0$，且 $\int_0^1 \frac{dt}{t^{1-a}}$ con. $\Rightarrow \int_0^1 t^{a-1}|\ln t|^{m+1}dt$ con. 依比较判别法，$\int_0^1 t^{x-1}(\ln t)^{m+1}e^{-t}dt$ 在 $[a,b]$ 中一致 con；

(2) 在 $\int_1^{+\infty} t^{x-1}(\ln t)^{m+1}e^{-t}dt$ 中，当 $\forall x\in[a,b]$ 时，

$|t^{x-1}(\ln t)^{m+1}e^{-t}| \le t^{b-1}(\ln t)^{m+1}e^{-t}$ 且

$\lim\limits_{t\to+\infty} t^{b-1}(\ln t)^{m+1}e^{-t}/\frac{1}{t^2} = \lim\limits_{t\to+\infty}\left(\frac{t^{b+1}}{e^{\frac{1}{2}t}}\right)\left(\frac{(\ln t)^{m+1}}{e^{\frac{1}{2}t}}\right)=0\cdot 0=0$

并且 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}dt$ con $\Rightarrow \int_1^{+\infty} t^{b-1}(\ln t)^{m+1}e^{-t}dt$ con. 利用

比较判别法，$\int_1^{+\infty} t^{x-1}(\ln t)^{m+1}e^{-t}dt$ 在 $[a,b]$ 中也一致 con.

故 $\int_0^{+\infty} t^{x-1}(\ln t)^{m+1}e^{-t}dt$ 在 $[a,b]$ 中一致 con 且连续 $\Rightarrow$

$\Gamma^{(m+1)}(x)$ 在 $[a,b]$ 中存在且连续 $\Rightarrow \Gamma^{(m+1)}(x)$ 在 x_0 处

存在且连续，再由 x_0 在 $(0,+\infty)$ 中的任意性知，

$\Gamma^{(m+1)}(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 中存在且连续。

由数归法可知，对 $\forall n\in N^*$，$\Gamma^{(n)}(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 中

存在且连续，即 $\Gamma(x)\in C^{\infty}(0,+\infty)$.

证(II). 利用 $B(x,y)=\dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ 及求导的四则运算

法则与复合函数求导法则，有

$$\frac{\partial B(x,y)}{\partial x}=\frac{\Gamma'(x)\Gamma(y)\Gamma(x+y)-\Gamma_x'(x+y)\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma^2(x+y)};$$

$$\frac{\partial(B(x,y))}{\partial y}=\frac{\Gamma'(y)\Gamma(x)\Gamma(x+y)-\Gamma_y'(x+y)\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma^2(x+y)}.$$

对 $B(x,y)$ 的更高阶偏导数依此类推，从 $\Gamma(x)\in C^{\infty}(0,+\infty)$

即可推论得 $B(x,y)\in C^{\infty}(D)$，$D:\begin{cases}x>0\\y>0\end{cases}$.

用证明 $\Gamma(x)\in C^{\infty}(0,+\infty)$ 的数学归纳法及类似的一致

收敛判别法(M级数判法)，还可证明：

$\zeta(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^x}\in C^{\infty}(1,+\infty)$，　　(如B)

(注：$\left(\dfrac{1}{n^x}\right)^{(m)}=(n^{-x})^{(m)}=(-1)^m n^{-x}(\ln n)^m$，$\forall m\in N^*$.

且 $\zeta^{(m)}(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 中内闭一致conv.)

(三)作业：证明本讲中的例1、例3、例4、例5、例6.

(14).　　(这是最后一次作业)

下证: $\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}dt}{e^t-1}=\zeta(x)\cdot\Gamma(x), (\forall x>1)$ 试证明. 其中

$\zeta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}, \forall x>1$; $\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}dt, \forall x>0$.

证明: ∵ 左边 $=\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}dt}{e^t-1}=\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}dt}{e^t(1-e^{-t})}=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}t^{x-1}dt}{1-e^{-t}}$

$$\xlongequal{\text{泰勒展开}}\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{x-1}\sum_{n=0}^{+\infty}(e^{-t})^n dt=\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}t^{x-1}e^{-(n+1)t}\right)dt$$

$$=\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}t^{x-1}e^{-nt}\right)dt \xlongequal[dt=\frac{1}{n}du]{\text{令 } nt=u,\text{ 则 } t=\frac{u}{n}} \int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{u}{n}\right)^{x-1}e^{-u}\frac{1}{n}du\right)$$

$$=\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}\right)u^{x-1}e^{-u}du=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}\left(\int_0^{+\infty}u^{x-1}e^{-u}du\right)=\zeta(x)\Gamma(x).$$

$(\forall x>1)$ = 右边.

$\therefore \int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}dt}{e^t-1}=\zeta(x)\cdot\Gamma(x), \forall x>1$.

在复数域中, 将实数 x 替换成复数 z, 其中 $Re(z)>1$, 则有.

$$\int_0^{+\infty}\frac{t^{z-1}dt}{e^t-1}=\zeta(z)\cdot\Gamma(z), \forall Re(z)>1.$$

从而实现了离散无限和的 $\zeta(x)$ 与连续无限积分的 $\Gamma(x)$ 的完美融合。

(5).