第48讲：总复习课(三)

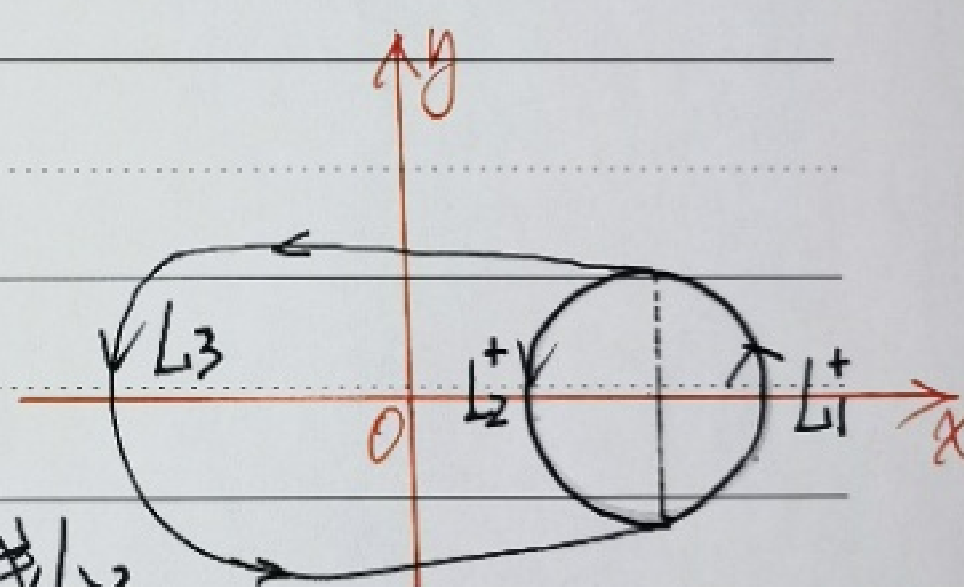
例1、设$\varphi(x)\in C^1(-\infty,+\infty)$，且当$C^+$是绕原点$O(0,0)$一周的任意正向的逐段光滑的闭曲线时，恒有

$$\oint_{C^+}\frac{2xy\,dx+\varphi(x)\,dy}{x^4+y^2}=A\ (常数).$$

(1)、设L^+为正向圆周：$(x-2)^2+y^2=1$，证明：$\oint_{L^+}\frac{2xy\,dx+\varphi(x)\,dy}{x^4+y^2}=0$；

(2)、求出函数$\varphi(x)$；

(3)、求出常数A.



解(1)：设L_1^+，L_2^+分别是L^+的右半圆与左半圆，作逐段光滑曲线L_3.

设$L_3+L_1^+\triangleq C_1^+$，$L_3+L_2^-\triangleq C_2^+$且$C_1^+$，$C_2^+$均为绕$O(0,0)$一周的正向闭曲线. 则令$dg(x,y)=\frac{2xy\,dx+\varphi(x)\,dy}{x^4+y^2}$时，有：

$$\oint_{L^+}dg(x,y)=\int_{L_1^+}dg(x,y)+\int_{L_2^+}dg(x,y)=\oint_{L_3+L_1^+}dg(x,y)-\oint_{L_3+L_2^-}dg(x,y)$$

$$=\oint_{C_1^+}dg(x,y)-\oint_{C_2^+}dg(x,y)=A-A=0.$$

解(2)：设L^+是单连通域$x>0$中的任意正向分段光滑的闭曲线，由题可知，$\oint_{L^+}\frac{2xy\,dx+g(x)\,dy}{x^4+y^2}=0$，此即表明向量场$\vec{A}(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))=\left(\frac{2xy}{x^4+y^2},\frac{g(x)}{x^4+y^2}\right)$是单连通域$D$：$x>0$中的无旋场：$\nabla\times\vec{A}(x,y)\equiv\theta$，$\forall(x,y)\in D\Leftrightarrow$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}\equiv\frac{\partial P}{\partial y},\ \forall(x,y)\in D\Leftrightarrow\frac{g'(x)(x^4+y^2)-4x^3g(x)}{(x^4+y^2)^2}\equiv\frac{2x(x^4+y^2)-2y(2xy)}{(x^4+y^2)^2}$$

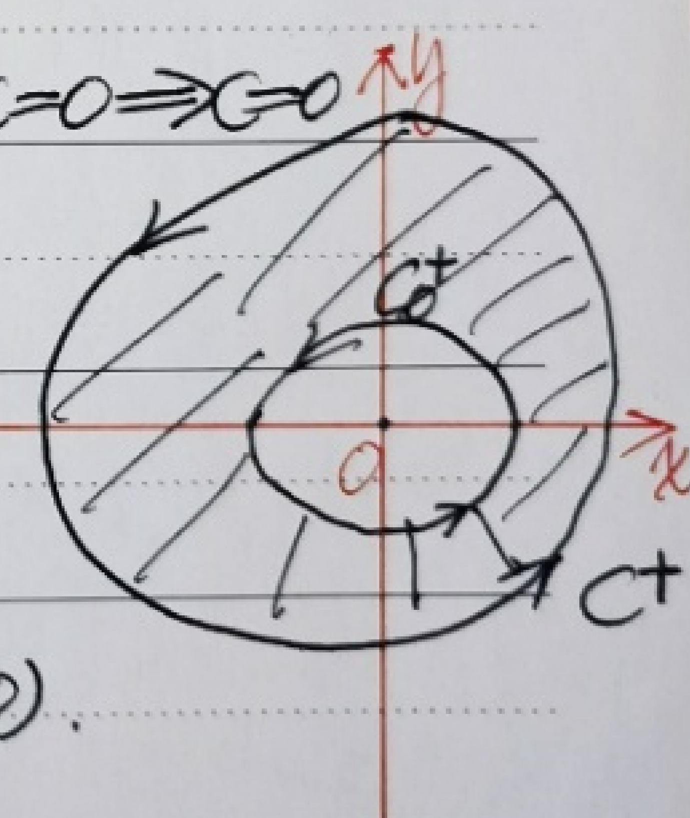
$$\Leftrightarrow(x^4g'(x)-4x^3g(x)-2x^5)+(g'(x)+2x)y^2\equiv0,\ \forall(x,y)\in D.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^4g'(x)-4x^3g(x)-2x^5=0 & (1^\circ)\\ g'(x)+2x=0 & (2^\circ)\end{cases},\ \forall x>0.$$

由(2°)得：$g(x)=-x^2+C$

由(1°)得：$x(-2x)-4(-x^2+C)-2x^2=0\Rightarrow-4C=0\Rightarrow C=0$

故$g(x)=-x^2$.



解(3)：由(2)知，$A=\oint_{C^+}\frac{2xy\,dx-x^2\,dy}{x^4+y^2}$

令$P(x,y)=\frac{2xy}{x^4+y^2}$，$Q(x,y)=\frac{-x^2}{x^4+y^2}$，$(x,y)\neq(0,0)$.

则$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{2x^5-2xy^2}{(x^4+y^2)^2}=\frac{\partial P}{\partial y}$，$\forall(x,y)\neq(0,0)$. 取$\varepsilon>0$充分小，使正向曲线$C_0^+$：$x^4+y^2=\varepsilon$在$C^+$围成的区域内部，并设$C_0^+$与$C^+$围成的区域为$D_0$.

则在区域D_0中，$P(x,y),Q(x,y)\in C^1(D_0)$且$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\equiv 0$，从而

$$A=\oint_{C^+}Pdx+Qdy=\oint_{C^++C_0^-}Pdx+Qdy+\oint_{C_0^+}Pdx+Qdy$$

而$\oint_{C^++C_0^-}Pdx+Qdy\xlongequal{Green}\iint_{D_0}(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy\equiv\iint_{D_0}0dxdy=0$，

且$\oint_{C_0^+}Pdx+Qdy=\oint_{C_0^+}\frac{2xydx-x^2dy}{x^4+y^2}=\oint_{C_0^+}\frac{2xydx-x^2dy}{\varepsilon}$

$=\frac{1}{\varepsilon}\oint_{C_0^+}2xydx-x^2dy\xlongequal{Green}\frac{1}{\varepsilon}\iint_{D^*}(-2x-2x)dxdy=\frac{-4}{\varepsilon}\iint_{D^*}xdxdy$

其中D^*是C_0^+：$x^4+y^2=\varepsilon$围成的有界闭区域，对称于x轴，

且被积函数$f(x,y)=x$是x的奇函数，故$\iint_{D^*}xdxdy=0$。

即$\oint_{C_0^+}Pdx+Qdy=0$，因此$A=0+0=0$。

注：此题中的分母可用：$\alpha x^{2m}+\beta y^{2n}$，$\forall\alpha>0,\beta>0,m>0,n>0$来替换。
但须满足$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$，$\forall(x,y)\neq(0,0)$。

例2，判断下列反常积分I的收敛性，收敛时进一步指出是否绝对收敛。

(1). $\int_a^{+\infty}\frac{\sin x\,dx}{x\ln(x+2)}$ $(a>0)$；(2). $\int_0^{+\infty}\frac{\cos(2x+1)dx}{\sqrt{x}\sqrt[3]{x^2+1}}$；(3). $\int_0^{+\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{x\sqrt{x}}dx$；

(4). $\int_2^{+\infty}\frac{x\ln(1+x)}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}dx$

(3).

解(1). 方法(一)：设 $f(x)=\sin x$, $g(x)=\frac{1}{x\ln(x+2)}$, $x\in[a,+\infty)$.

则对 $\forall b>a$, $\left|\int_a^b f(x)dx\right| = \left|\int_a^b \sin x dx\right| = |\cos a-\cos b| \le 2$, 且 $g(x)\downarrow 0\ (x\to+\infty)$

依Dirichlet判法. $\int_a^{+\infty}\frac{\sin x}{x\ln(x+2)}dx$ con.

而 $\left|\frac{\sin x}{x\ln(x+2)}\right| \ge \frac{\sin^2 x}{x\ln(x+2)} = \frac{1-\cos 2x}{2x\ln(x+2)}$ 且 $\int_a^{+\infty}\frac{\cos 2x}{2x\ln(x+2)}dx$ 依

Dirichlet判法con, 而 $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{2x\ln(x+2)}$ div ($\because \frac{1}{2x\ln(x+2)} > \frac{1}{2(x+2)\ln(x+2)}$

且 $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{2(x+2)\ln(x+2)} = \frac{1}{2}\int_a^{+\infty}\frac{d\ln(x+2)}{\ln(x+2)} = \frac{1}{2}\ln(\ln(x+2))\Big|_a^{+\infty} = +\infty$)

故 $\int_a^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x\ln(x+2)}\right|dx$ div. $\Longrightarrow \int_a^{+\infty}\frac{\sin x\,dx}{x\ln(x+2)}$, $\int_a^{+\infty}\frac{\cos x\,dx}{x\ln(x+2)}$ 皆条件con.

方法(二)：设 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$, $g(x)=\frac{1}{\ln(x+2)}$, $x\in[a,+\infty)$. 则

$\int_a^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ con. ($\because \int_a^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx = \int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx - \int_0^a\frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2} - \int_0^a\frac{\sin x}{x}dx$

且 $\int_0^a\frac{\sin x}{x}dx$ 是正常积分, 故con). 且 $g(x)\in[a,+\infty)$中单调减

且有界: $|g(x)| = \left|\frac{1}{\ln(x+2)}\right| \le \ln^{-1}(a+2)$, $\forall x\in[a,+\infty)$.

依Abel判法. $\int_a^{+\infty}f(x)g(x)dx = \int_a^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\frac{dx}{\ln(x+2)}$ con. 余同上。

解(2)：$x=0$是瑕点, 且在 $\int_0^1\frac{\cos(2x+1)}{\sqrt{x}\sqrt[3]{x^2+1}}dx$ 中,

$\left|\frac{\cos(2x+1)}{\sqrt{x}\sqrt[3]{x^2+1}}\right| \le \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt[3]{x^2+1}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$, $(x\to0^+)$. 且 $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}$ con.

从而 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\,\sqrt[3]{x^2+1}}$ con, $\Rightarrow \int_0^1 \frac{\cos(2x+1)}{\sqrt{x}\,\sqrt[3]{x^2+1}}dx$ 及 $\int_0^1 \frac{\sin(\alpha x+\beta)}{\sqrt{x}\,\sqrt[3]{x^2+1}}dx$

均绝对con;

在 $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2x+1)}{\sqrt{x}\,\sqrt[3]{x^2+1}}dx$ 中, $\left|\frac{\cos(2x+1)}{\sqrt{x}\,\sqrt[3]{x^2+1}}\right| \le \frac{1}{\sqrt{x}\,\sqrt[3]{x^2+1}} \sim \frac{1}{x^{\frac{7}{6}}}$, $(x\to+\infty)$

且 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{7}{6}}}$ con $\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}\,\sqrt[3]{x^2+1}}$ con $\Longrightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\cos(2x+1)}{\sqrt{x}\,\sqrt[3]{x^2+1}}dx$ 及

$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(\alpha x+\beta)}{\sqrt{x}\,\sqrt[3]{x^2+1}}dx$ 均绝对con.

综上, $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(2x+1)dx}{\sqrt{x}\,\sqrt[3]{x^2+1}}$ 及 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\alpha x+\beta)dx}{\sqrt{x}\,\sqrt[3]{x^2+1}}$ 均绝对收敛。

更一般地, 当 $a>0$ 时 $\int_a^{+\infty} \frac{\cos(\alpha x+\beta)}{x^\lambda}dx$; $\int_a^{+\infty} \frac{\sin(\alpha x+\beta)}{x^\lambda}dx$ 当 $\lambda>1$ 时绝对收敛; 当 $0<\lambda\le 1$ 时条件收敛; 当 $\lambda\le 0$ 时发散。

解(3) 令 $\frac{1}{x}=u$ 则 $x=\frac{1}{u}$, $dx=-\frac{1}{u^2}du$, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin\frac{1}{x}}{x\sqrt{x}}dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{\sqrt{u}}du$

$\because \lim\limits_{u\to0^+} \frac{\sin u}{\sqrt{u}} = \lim\limits_{u\to0^+} \frac{u}{\sqrt{u}} = 0$, $\therefore u=0$ 不是瑕点 $\Rightarrow \int_0^1 \frac{\sin u}{\sqrt{u}}du$

是正常积分, 必收敛, 而在 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{\sqrt{u}}du$ 中, 对 $\forall b>1$,

$\left|\int_1^b \sin u\,du\right| \le 2$, $\frac{1}{\sqrt{u}} \downarrow 0\ (u\to+\infty)$, 由 Dirichlet 判别法,

$\int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{\sqrt{u}}du$ 收敛. 但从 $\left|\frac{\sin u}{\sqrt{u}}\right| \ge \frac{\sin^2 u}{\sqrt{u}} = \frac{1-\cos 2u}{2\sqrt{u}}$, 且

$\int_1^{+\infty} \frac{du}{2\sqrt{u}}$ div; $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2u}{2\sqrt{u}}du$ con, $\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 u}{\sqrt{u}}du$ div.

$\Rightarrow \int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin u}{\sqrt{u}}\right|du$ div，从而 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin u}{\sqrt{u}}du$ 条件收敛，即

$\int_1^{+\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{x\sqrt{x}}dx$ 条件收敛 $\Rightarrow \int_0^1\frac{\sin\frac{1}{x}}{x\sqrt{x}}dx$ 条件收敛；

解(四)：$x=\pm1$ 不是瑕点，且从 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}=0<1\Rightarrow$

x 充分大时，$\ln(1+x)<\sqrt{x}$，$\Rightarrow 0<\frac{x\ln(1+x)}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}<\frac{x\sqrt{x}}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}\sim\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$

$(x\to+\infty)$ 且 $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$ con，$\Rightarrow\int_2^{+\infty}\frac{x\sqrt{x}}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}dx$ con，依比较

判别法，$\int_2^{+\infty}\frac{x\ln(x+1)}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}dx$ 收敛，且是绝对收敛。

利用非负连续函数收敛的比较判别法或比较判别

法的极限形式时，常常用到下列的放大不等式：

(1). $n^n\gg n!\gg a^n\gg n^\alpha\gg(\ln n)^m$，$(\forall a>1,\alpha>0,m>0)$

(2). $x^x\gg\Gamma(x+1)\gg a^x\gg x^\alpha\gg(\ln x)^m$，$(\forall a>1,\alpha>0,m>0)$

例13. 设 Σ 为空间椭圆圆盘：$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le1\\ z=c\end{cases}$，取下侧.

计算：$I=\iint\limits_{\Sigma}(yz+x)dydz+(xz+y)dzdx+(xy+z)dxdy$

解法(一)：在 Σ 上，$\because z\equiv c$，$\therefore dz=0\Rightarrow dydz=0, dzdx=0$，

$\because I=\iint\limits_{\Sigma}(yz+x)dydz+\iint\limits_{\Sigma}(xz+y)dzdx+\iint\limits_{\Sigma}(xy+z)dxdy=$

$=0+0+\iint\limits_{\Sigma}(xy+z)dxdy=(-1)\cdot\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1}(xy+c)dxdy$ （一代二换三定号）

$=-\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1}xydxdy-c\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1}1dxdy=0-c\pi ab=-\pi abc.$

其中，$\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1}xydxdy=0$ 是利用了奇偶对称性（xy关于x是奇函数）。

解法(三)：从 Σ 的方程得知，Σ 的单位法向量 $\vec{n}=-\vec{k}=(0,0,-1)=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)\Rightarrow\cos\alpha=0,\cos\beta=0,\cos\gamma=-1.$

则 $dydz=\cos\alpha dS=\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}(\cos\gamma dS)=\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}dxdy$；$dzdx=\cos\beta dS=\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}(\cos\gamma dS)=\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}dxdy$. 从而

$I=\iint\limits_{\Sigma}\left[(yz+x)\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}+(xz+y)\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}+(xy+z)\right]dxdy$ （三化一公式）

$=\iint\limits_{\Sigma}\left[(yz+x)\cdot\frac{0}{-1}+(xz+y)\frac{0}{-1}+(xy+z)\right]dxdy$

$=(-1)\cdot\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1}(xy+c)dxdy=0+c\pi ab(-1)=-\pi abc.$

同理，由 $dydz=\cos\alpha dS$, $dzdx=\cos\beta dS$, $dxdy=\cos\gamma dS\Rightarrow$ $dzdx=\cos\beta dS=\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}(\cos\alpha dS)=\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}dydz$, $dxdy=\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}(\cos\alpha dS)=\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}dydz$.

$$\Rightarrow I=\iint_{\Sigma} P\,dydz+Q\,dzdx+R\,dxdy=\iint_{\Sigma}\left(P+Q\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}+R\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}\right)dydz$$

$$=\iint_{\Sigma}\left[P\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}+Q+R\frac{\cos\gamma}{\cos\beta}\right]dzdx \quad (\text{“三化一公式”})$$

其中，$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\vec{n}$ 是 Σ 的法向量（单位）。

例4、设 D 是 xoy 平面中的单连通域，即曲面单连通域，

$P(x,y),Q(x,y)\in C^1(D)$，$\vec{A}(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))$，则以下四个命题等价：

(I). $\vec{A}(x,y)$ 是 D 中的无旋场，即 $\nabla\times\vec{A}(x,y)=0$，$\forall(x,y)\in D$

即 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$，$\forall(x,y)\in D$；

(II). $\vec{A}(x,y)$ 是 D 中的保守场，即对 D 内的任一分段光滑的闭曲线 L，恒有 $\oint_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$；

(III). $\vec{A}(x,y)$ 是 D 中的有势场（梯度场），即存在势函数 $\varphi(x,y)\in C^1(D)$，使 $d\varphi(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$，即 $\vec{A}(x,y)=\nabla\varphi(x,y)$

$(x,y)\in D$，并且 $\varphi(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)dy$

其中，(x_0,y_0) 是 D 内的定点，(x,y) 是 D 内的动点。

(IV) ODE：$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ 在 D 内是全微分方程（恰当方程），且其通解为 $\varphi(x,y)=C$.