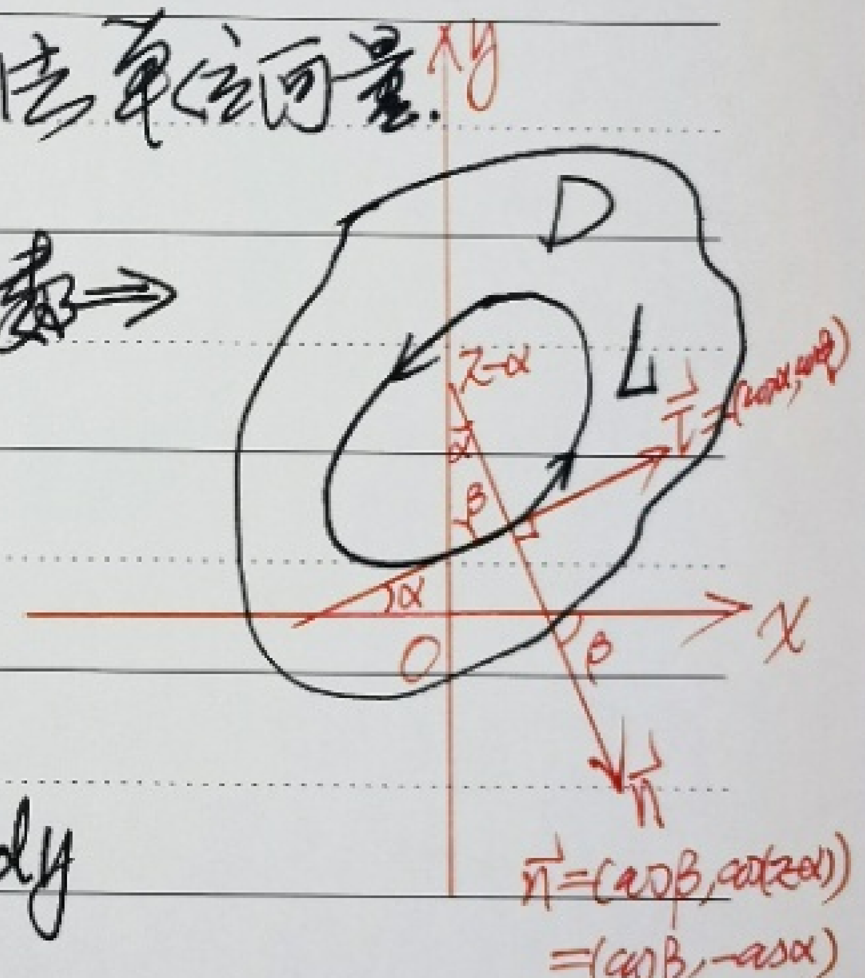
第49讲：总复习课(四).

例1、设D是xoy平面中的区域，$u=f(x,y)\in C^2(D)$ 且u满足二维Laplace方程：$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\Delta u=0$，则称u是D中的调和函数. 证明：$u=f(x,y)$ 是D中的调和函数的充要条件是：$\oint_L \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}ds=0$，其中，L是D中任一条分段光滑的正向闭曲线，$\vec{n}$ 为L的外法单位向量.



证"⟹"已知 $u=f(x,y)$ 是D中的调和函数⟹

$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，⟹ $\oint_L \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}ds=$

$\oint_L \nabla u\cdot\vec{n}\,ds=\oint_L (u'_x,u'_y)\cdot(\cos\beta,-\sin\alpha)ds$

$=\oint_L (u'_x,u'_y)\cdot(dy,-dx)=\oint_L -u'_y dx+u'_x dy$

$\underline{\text{Green}}\ \iint_{D_0}\left(\frac{\partial(u'_x)}{\partial x}-\frac{\partial(-u'_y)}{\partial y}\right)dxdy=\iint_{D_0}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)dxdy=\iint_{D_0}0\,dxdy=0$，

证"⟸"，已知 $\oint_L \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}ds=0$，L是D中任意分段光滑闭路.

对 $\forall M_0(x_0,y_0)\in D$，取D内的正向圆周 $L: (x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r_0^2$，设L围的区域为 D_0，

则由上述推导知，$\iint\limits_{D_0}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)dxdy=0$，因 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=u''_{xx}(x,y)$，
$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=u''_{yy}(x,y)$ 皆连续，由二重积分的中值定理，$\exists Q_0\in D_0$
积分
使 $(u''_{xx}(Q_0)+u''_{yy}(Q_0))S(D_0)=0$，$S(D_0)=\pi r_0^2>0$，即

$u''_{xx}(Q_0)+u''_{yy}(Q_0)=0$ 两边取 $r_0\to0^+$ 的极限，则有 $Q_0\to M_0$，
且 $u''_{xx}(M_0)+u''_{yy}(M_0)=0$，即 $\Delta u\big|_{M_0}=0$，由 M_0 在 D 中的任意性
知，$\Delta u\equiv0$，$\forall(x,y)\in D$，即 u 是 D 中的调和函数。

例2 设 Ω 是 $xoyz$ 空间（即 O—xyz 空间）中的区域，
$u=f(x,y,z)\in C^2(\Omega)$，且 u 满足三维 Laplace 方程：$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$，
则 u 是 Ω 中的调和函数。证明：

$u=f(x,y,z)$ 是 Ω 中的调和函数 $\Longleftrightarrow \oint\!\!\!\oint\limits_{\Sigma}\frac{\partial u}{\partial n}dS=0$，

其中，Σ 是 Ω 中任取的逐片光滑的闭曲面，$\vec{n}$ 为 Σ 外法单位向量，$\vec{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$，$\vec{n}dS=(dydz,dzdx,dxdy)\triangleq d\vec{S}$

证："$\Longrightarrow$" 已知 $u=f(x,y,z)$ 是 Ω 中的调和函数 $\Rightarrow \Delta u=u''_{xx}+u''_{yy}+u''_{zz}=0$，$\forall(x,y,z)\in\Omega$，此时，

$$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}\frac{\partial u}{\partial n}ds=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}\nabla u\cdot\vec{n}\,ds=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}(u_x,u_y,u_z)\cdot(dydz,dzdx,dxdy)$$

$$=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}u_x dydz+u_y dzdx+u_z dxdy\xlongequal{Gauss}\iiint_{\Omega_0}(u''_{xx}+u''_{yy}+u''_{zz})dxdydz$$

$=\iiint_{\Omega_0}0\,dxdydz=0$. Ω_0是Σ围成的区域.

证"$\Longleftarrow$" 已知对$\forall\Sigma\subset\Omega$，恒有$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}\frac{\partial u}{\partial n}ds=0$，

任取$M_0(x_0,y_0,z_0)\in\Omega$，设$\Sigma_0:(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r_0^2$，取$\vec{n}$为$\Sigma_0$的外法单位向量，且令$\Sigma_0$围成的区域为$\Omega_0$，则由上述推导可知$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma_0}\frac{\partial u}{\partial n}ds=\iiint_{\Omega_0}(u''_{xx}+u''_{yy}+u''_{zz})dxdydz=0$，

因$u''_{xx}(x,y,z)$，$u''_{yy}(x,y,z)$，$u''_{zz}(x,y,z)$均在Ω_0中连续，上述三重积分由积分中值定理：$\exists Q_0\in\Omega_0$，使

$$\iiint_{\Omega_0}(u''_{xx}+u''_{yy}+u''_{zz})dxdydz=\left(u''_{xx}(Q_0)+u''_{yy}(Q_0)+u''_{zz}(Q_0)\right)V(\Omega_0)=0$$

而$V(\Omega_0)=\frac{4}{3}\pi r_0^3>0$，$\therefore u''_{xx}(Q_0)+u''_{yy}(Q_0)+u''_{zz}(Q_0)=0$.

令$r_0\to0^+$，则$Q_0\to M_0\Rightarrow u''_{xx}(M_0)+u''_{yy}(M_0)+u''_{zz}(M_0)=0$

即$\Delta u|_{M_0}=0$，由M_0在Ω中的任意性知：

$\Delta u|_M=0$，$\forall M\in\Omega$. 即$\Delta u=0$.

(3).

xoy平面中最著名的调和函数为：

$u=f(x,y)=\ln\left((x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right)^{\frac{1}{2}}$，$M_0(x_0,y_0)\in D$；

空间 $O-xyz$ 中最著名的调和函数为：

$u=f(x,y,z)=\frac{1}{r}$，$r=\left((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\right)^{\frac{1}{2}}>0$，$(x_0,y_0,z_0)\in\Omega$.

例3. 设 Σ 是 $x^2+y^2+z^2=a^2$ $(a>0)$ 的外侧. 计算曲面积分：

$$I=\oiint_{\Sigma}\frac{x\,dy\,dz+y\,dz\,dx+z\,dx\,dy}{\left(\sqrt{2x^2+2y^2+z^2}\right)^3}$$

解(1). 令 $P(x,y,z)=\frac{x}{r^3}$，$Q(x,y,z)=\frac{y}{r^3}$，$R(x,y,z)=\frac{z}{r^3}$，其中，

$r=\sqrt{2x^2+2y^2+z^2}>0$ 则当 $(x,y,z)\neq(0,0,0)$ 时.

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=\frac{r^2-6x^2}{r^5}+\frac{r^2-6y^2}{r^5}+\frac{r^2-3z^2}{r^5}$$

$$=\frac{3r^2-6x^2-6y^2-3z^2}{r^5}=\frac{3(2x^2+2y^2+z^2)-6x^2-6y^2-3z^2}{r^5}=0.$$

(2) 取 $\varepsilon_0>0$ 充分小，使 $2x^2+2y^2+z^2=\varepsilon_0^2$ 在球面 Σ：$x^2+y^2+z^2=a^2$ 的内部.

设 Σ_0^+ 为 $2x^2+2y^2+z^2=\varepsilon_0^2$，且法向量朝外，则

$$I=\oiint_{\Sigma}=\oiint_{\Sigma+\Sigma_0^-}-\oiint_{\Sigma_0^-}=\oiint_{\Sigma+\Sigma_0^-}+\iint_{\Sigma_0^+}$$

令 Ω_0 是 Σ 与 Σ_0^- 围成的区域.

而 $\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_0^-} \frac{x}{r^3}dydz+\frac{y}{r^3}dzdx+\frac{z}{r^3}dxdy \overset{\text{Gauss}}{=\!=\!=} \iiint\limits_{\Omega_0}\left((\frac{x}{r^3})'_x+(\frac{y}{r^3})'_y+(\frac{z}{r^3})'_z\right)dV$

$=\iiint\limits_{\Omega_0} 0\,dV=0$；$\oiint\limits_{\Sigma_0^+}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(\sqrt{2x^2+2y^2+z^2})^3}=$

$\oiint\limits_{\Sigma_0^+}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(\sqrt{\varepsilon^2})^3}=\frac{1}{\varepsilon^3}\oiint\limits_{\Sigma_0^+}xdydz+ydzdx+zdxdy \overset{\text{Gauss}}{=\!=\!=}$

$\frac{1}{\varepsilon^3}\iiint\limits_{\Omega^*}(1+1+1)dV=\frac{1}{\varepsilon^3}3\times V(\Omega^*)=\frac{3}{\varepsilon^3}\frac{4}{3}\pi(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}})(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}})\varepsilon=2\pi$.

Ω^* 是椭球：$\frac{x^2}{(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}})^2}+\frac{y^2}{(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}})^2}+\frac{z^2}{\varepsilon^2}\le 1$，$V(\Omega^*)=\pi(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}})(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}})\cdot\varepsilon$.

例4．设 $u(x,y,z),v(x,y,z)\in C^2(\Omega)$，$\Omega$ 是 $O\text{-}xyz$ 中的区域．则

(1). $\oiint\limits_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial n}ds=\iiint\limits_{\Omega}(\nabla u\cdot\nabla v+u\Delta v)dV$；

(2). $\oiint\limits_{\partial\Omega} u\frac{\partial u}{\partial n}ds=\iiint\limits_{\Omega}((\frac{\partial u}{\partial x})^2+(\frac{\partial u}{\partial y})^2+(\frac{\partial u}{\partial z})^2+u\Delta u)dV$；

(3). $\oiint\limits_{\partial\Omega}(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n})ds=\iiint\limits_{\Omega}(u\Delta v-v\Delta u)dV$.

其中，$\vec{n}$ 是 $\partial\Omega$ 的单位外法向；$(\frac{\partial u}{\partial x})^2+(\frac{\partial u}{\partial y})^2+(\frac{\partial u}{\partial z})^2=|\nabla u|^2$.

证(1)：左边 $=\oiint\limits_{\partial\Omega}u\,\nabla v\cdot\vec{n}ds=\oiint\limits_{\partial\Omega}u(v_x,v_y,v_z)\cdot(dydz,dzdx,dxdy)$

$=\oiint\limits_{\partial\Omega}uv_x dydz+uv_y dzdx+uv_z dxdy \overset{\text{Gauss}}{=\!=\!=}$

$$=\iiint_{\Omega}[(uV_x)'_x+(uV_y)'_y+(uV_z)'_z]dxdydz$$

$$=\iiint_{\Omega}[(u_xV_x+u_yV_y+u_zV_z)+u(V_{xx}+V_{yy}+V_{zz})]dxdydz$$

$$=\iiint_{\Omega}[\nabla u\cdot\nabla V+u\Delta V]dV=\text{右边}.$$ 证毕.

在(1)中，交换 u, V 的位置，则

$$\oiint_{\partial\Omega}V\frac{\partial u}{\partial n}ds=\iiint_{\Omega}(\nabla V\cdot\nabla u+V\Delta u)dV \qquad (*)$$

(1)−(*) 即有：$\oiint_{\partial\Omega}(u\frac{\partial V}{\partial n}-V\frac{\partial u}{\partial n})ds=\iiint_{\Omega}(u\Delta V-V\Delta u)dV.$

证(2)：左边 $=\oiint_{\partial\Omega}u\,\nabla u\cdot\vec{n}ds=\oiint_{\partial\Omega}u(u_x,u_y,u_z)\cdot(dydz,dzdx,dxdy)$

$$=\oiint_{\partial\Omega}uu_xdydz+uu_ydzdx+uu_zdxdy\overset{Gauss}{=\!=\!=}\iiint_{\Omega}[(uu_x)'_x+(uu_y)'_y+(uu_z)'_z]dV$$

$$=\iiint_{\Omega}[(u_x^2+u_y^2+u_z^2)+u(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})]dV=\iiint_{\Omega}(|\nabla u|^2+u\Delta u)dV=\text{右边}$$

例5. 积分四大公式的使用条件：

(1). "N—L"公式：$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b dF(x)=F(b)-F(a)$ 中，$f(x)$ 须有初等函数 $F(x)$ 作为 $f(x)$ 的原函数. a 或 b 可取无穷大.

(2). Green公式：$\oint_{\partial D}p(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy$ 中，

D须为 xoy 平面中的有界闭区域；$P,Q\in C^1(D)$；且 ∂D 须是D的正向边界；且逐段光滑；

(3)、Gauss公式：$\oiint\limits_{\partial\Omega} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dV$ 中，

Ω 须是 $O-xyz$ 中的有界闭区域，$P,Q,R\in C^1(\Omega)$；且 $\partial\Omega$ 须是 Ω 的外侧边界曲面；且逐片光滑.

(4)、Stokes公式：$\oint\limits_{\partial\Sigma} Pdx+Qdy+Rdz=\iint\limits_{\Sigma}\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}=$

$\iint\limits_{\Sigma}\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}dS=\iint\limits_{\Sigma}\vec{n}\cdot(\nabla\times\vec{A})\,dS$，$\vec{A}=(P,Q,R)\in C^1(\Omega)$.

$\Sigma\subset\Omega$，Σ 逐片光滑，$\partial\Sigma$ 的正向与 Σ 的正侧服从右手系. $\partial\Sigma$ 须逐段光滑. Σ 是曲线 $\partial\Sigma$ 张成的曲面，越简单越好！最简单的 Σ 是空间 $O-xyz$ 中的平面，此时

$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 可以 Σ：$ax+by+cz+d=0$ 中 令 $F(x,y,z)=ax+by+cz+d\Rightarrow$

$\vec{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=(F_x,F_y,F_z)/\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}=\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)$

$\Rightarrow\cos\alpha=a/\sqrt{a^2+b^2+c^2}$，$\cos\beta=b/\sqrt{a^2+b^2+c^2}$，$\cos\gamma=c/\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

例6、第二类曲面(线)积分的"三合一"计算法：

(1). 在 $I=\iint\limits_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$ 中，设Σ是光滑有向曲面，Σ的方向(侧)是用Σ的单位法向量 $\vec{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 来表示的，其中，$\vec{n}dS=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)dS=(dydz,dzdx,dxdy)=d\vec{S}$ 称为有向面积元，从 $\cos\alpha dS=dydz,\cos\beta dS=dzdx,\cos\gamma dS=dxdy\Rightarrow$ 当 $\cos\gamma\neq0$ 时，$dydz=\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}(\cos\gamma dS)=\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}dxdy$，$dzdx=\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}(\cos\gamma dS)=\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}dxdy\Rightarrow I=\iint\limits_{\Sigma}(P\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}+Q\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}+R)dxdy$

$=\pm\iint\limits_{D_{xy}}(P\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}+Q\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}+R)dxdy$，$D_{xy}$是Σ在xoy坐标面的投影区域，Σ取上侧时，I取"+"号，Σ取下侧时，I取"-"号。

同理，若 $\cos\alpha\neq0$ 则 $dzdx=\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}(\cos\alpha dS)=\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}dydz$，$dxdy=\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}(\cos\alpha dS)=\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}(dydz)\Rightarrow$

$I=\iint\limits_{\Sigma}(P+Q\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}+R\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha})dydz=\pm\iint\limits_{D_{yz}}(P+Q\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}+R\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha})dydz$

D_{yz}是Σ在yoz坐标面的投影区域，且Σ取前侧时，I取"+"号，Σ取后侧时，I取"-"号。

(2). 在 $I=\int_{\Gamma}Pdx+Qdy+Rdz$ 中，Γ是光滑有向曲线，Γ的方向

是用P的单位切向量 $\vec{\tau}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 来表示的，其中，

$\vec{\tau}ds=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)ds=(dx,dy,dz)=d\vec{s}$ 称为有向弧元。

若 $\cos\alpha\neq0$，则 $dy=\cos\beta ds=\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}(\cos\alpha ds)=\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}dx$, $dz=\cos\gamma ds=\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}(\cos\alpha ds)=\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}dx$，从而

$$I=\int_{\Gamma}(P+Q\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}+R\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha})dx$$；若 $\cos\gamma\neq0$，则有

$$I=\int_{\Gamma}(P\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}+Q\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}+R)dz$$；若 $\cos\beta\neq0$，则有

$$I=\int_{\Gamma}(P\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}+Q+R\frac{\cos\gamma}{\cos\beta})dy.$$

在第30讲的例2中，曾计算 $I=\iint_{\Sigma}x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$，$\Sigma$ 为上半球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ $(z\geq0)$ 的上侧。$\Rightarrow\vec{n}=(x,y,z)/a=(\frac{x}{a},\frac{y}{a},\frac{z}{a})=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$，用"三合一"计算法：$dydz=\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}dxdy=\frac{x}{z}dxdy$；$dzdx=\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}dxdy=\frac{y}{z}dxdy$ $\Rightarrow I=\iint_{\Sigma}(x^2\cdot\frac{x}{z}+y^2\cdot\frac{y}{z}+z^2)dxdy$

$$=(+1)\iint_{x^2+y^2\leq a^2}\left[\frac{x^3}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}+\frac{y^3}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}+(a^2-x^2-y^2)\right]dxdy$$ (一代二换三定号)

$\underline{\text{奇偶对称性}}$ $$0+0+\iint_{x^2+y^2\leq a^2}(a^2-x^2-y^2)dxdy\ \frac{x=r\cos\theta}{y=r\sin\theta}\ \int_0^{2\pi}\left(\int_0^a(a^2-r^2)rdr\right)d\theta$$

$$=2\pi\left(\frac{a^4}{2}-\frac{a^4}{4}\right)=\frac{1}{2}\pi a^4.$$

此题还有"补面用Gauss公式法"及"偶零奇倍法"等另外的四种解法，见第30讲，31讲、32讲的讲解内容。