第45讲：含参变量反常积分的一致收敛性

(一) 含参反常积分：$\int_a^{+\infty} f(x,u)dx=g(u)$，$u\in[\alpha,\beta]$ 的一致收敛性的定义：其中，$f(x,u)$ 在 $D:\begin{cases} a\le x<+\infty \\ \alpha\le u\le\beta \end{cases}$ 中为连续函数。此处，区间 $[\alpha,\beta]$ 称之为含参变量反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x,u)dx$ 的收敛域。即对 $[\alpha,\beta]$ 中的每一点 u，都成立：$\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x,u)dx=g(u) \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0$，$\exists A(\varepsilon,u)>a$，对 $\forall A>A(\varepsilon,u)$，$\left|\int_a^A f(x,u)dx-g(u)\right|<\varepsilon$ 恒成立。

即 $\left|\int_a^A f(x,u)dx-\left(\int_a^A f(x,u)dx+\int_A^{+\infty} f(x,u)dx\right)\right|=\left|\int_A^{+\infty} f(x,u)dx\right|<\varepsilon$ 恒成立。我们这里称在 $[\alpha,\beta]$ 上每一点 u 都收敛的收敛为逐点收敛。如果对 $\forall\varepsilon>0$，存在一个 $A_0(\varepsilon)>a$，$A_0(\varepsilon)$ 仅与 ε 有关，且当 $A>A_0(\varepsilon)$ 时，$\left|\int_A^{+\infty} f(x,u)dx\right|<\varepsilon$，对 $\forall u\in[\alpha,\beta]$ 都成立。或者 $\left|\int_a^A f(x,u)dx-g(u)\right|<\varepsilon$ 对 $\forall u\in[\alpha,\beta]$ 都成立。即对 $\forall\varepsilon>0$，能找到一个适用于整个收敛域 $[\alpha,\beta]$ 的正实数 $A_0(\varepsilon)$ 时，

(1).

则称含参数x(广义)积分$\int_a^{+\infty} f(x,u)dx$在收敛域$[\alpha,\beta]$中一致收敛。可见,一致收敛是在$[\alpha,\beta]$上的整体性收敛。

显然,一致收敛是在逐点收敛的基础上,进一步提出了更高的要求,能找到一个只与$\varepsilon>0$有关的$A_0(\varepsilon)$,$(A_0(\varepsilon)>a)$
(可取$A_0(\varepsilon)>0$)
一旦$A>A_0(\varepsilon)$,就有$\left|\int_A^{+\infty} f(x,u)dx\right|<\varepsilon$在$[\alpha,\beta]$上恒成立。因此,一致收敛必定是逐点收敛的,反之未必!

在第12章中,若$f(x)$在$[-\pi,\pi]$中可积且平方可积,且

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),\quad T_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{n}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

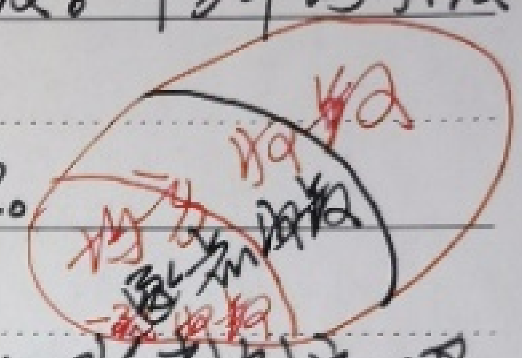
则$\lim\limits_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}[T_n(x)-f(x)]^2dx=0$. (※2)

此时,称函数列$\{T_n(x)\}$平方平均收敛于$f(x)$,$\forall x\in[-\pi,\pi]$.

这里,并不要求在$[-\pi,\pi]$中的每一点x,$\{T_n(x)\}$都要收敛于$f(x)$,即不要求$\{T_n(x)\}$在$[-\pi,\pi]$中逐点收敛于$f(x)$,只要求除了个别点外,$\{T_n(x)\}$在$[-\pi,\pi]$中都收敛于$f(x)$。个别点的个数

可以是有限个，也可以是可数无限个。因此，均方收敛是一种整体的收敛。同理，一致连续也是一种整体连续的概念。

因此，我们学过的三种收敛中，逐点收敛的要求高于平方平均收敛，而一致收敛的要求又高于逐点收敛。平方平均收敛也可理解为几乎处处收敛或几乎逐点收敛。



(三) $\int_a^{+\infty} f(x,u)dx$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛于 $g(u)$ 的四个判别定理

(设 $\int_a^{+\infty} f(x,u)dx \xrightarrow{\text{逐点收敛于}} g(u),\ u\in[\alpha,\beta]$)

判别th1 (Cauchy准则)

$\int_a^{+\infty} f(x,u)dx \xrightarrow{\text{一致}} g(u),\ u\in[\alpha,\beta] \Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists A_0(\varepsilon)>a$ ，$A_0(\varepsilon)$ 仅与 ε 有关，对 $\forall A_2>A_1>A_0(\varepsilon)$ ，$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x,u)dx\right|<\varepsilon$ 在 $[\alpha,\beta]$ 中恒成立。

判别th2 (Weierstrass)：若 $\exists h(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上非负连续且 $\int_a^{+\infty} h(x)dx$ 收敛，$|f(x,u)|\le h(x)$ ，$\forall u\in[\alpha,\beta]$ ，x 充分大．则 $\int_a^{+\infty} f(x,u)dx$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛于 $g(u)$。称 $\int_a^{+\infty} h(x)dx$ 为 $\int_a^{+\infty} f(x,u)dx$ 的优(强)积分，$h(x)$ 是 $f(x,u)$ 的控制函数。

判别th3 (Dirichlet) 在 $\int_a^{+\infty} f(x,u)h(x,u)dx$ 中，若对 $\forall b>a$ ，$\int_a^{b} f(x,u)dx$

对于 b 与 u 都一致有界的，即存在一个与 b,u 无关的正数 $M>0$.

使得 $\left|\int_a^b f(x,u)dx\right| \le M$. 对 $\forall u\in[\alpha,\beta]$, $\forall b>a$ 恒成立。此外，

$h(x,u)$ 是 x 的单调函数，且 $h(x,u) \xrightarrow{一致} 0\ (x\to+\infty)$，即对 $\forall \varepsilon>0$

$\exists X_0(\varepsilon)>0$，$X_0(\varepsilon)$ 仅与 ε 有关，与 u 值无关，一旦 $x>X_0(\varepsilon)$，恒有 $|h(x,u)-0|<\varepsilon$.

则 $\int_a^{+\infty} f(x,u)h(x,u)dx$ 在 $[\alpha,\beta]$ 中一致收敛于 $G(u)=\int_a^{+\infty} f(x,u)h(x,u)dx$.

判别 Th4 (Abel) 在 $\int_0^{+\infty} f(x,u)h(x,u)dx$ 中，若 $\int_a^{+\infty} f(x,u)dx$ 在 $[\alpha,\beta]$ 中

一致收敛，$h(x,u)$ 在 D 中关于 x 单调且关于 u 一致有界，即

$h(x,u)$ 是 x 的单调函数且存在与 u 无关的 $M>0$，使 $|h(x,u)|\le M$

$\forall u\in[\alpha,\beta]$，$x$ 充分大。则 $\int_0^{+\infty} f(x,u)h(x,u)dx \xlongequal{一致} G(u)$，$u\in[\alpha,\beta]$.

证 Th2：从 $\int_a^{+\infty} h(x)dx$ 收敛 $\Longrightarrow \underset{①}{\underline{\forall\varepsilon>0}}$，$\underset{②}{\underline{\exists A_0(\varepsilon)>0}}$，对 $\underset{③}{\underline{\forall A_2>A_1>A_0(\varepsilon)}}$

$\left|\int_{A_1}^{A_2} h(x)dx\right|<\varepsilon$ 恒成立。此处，$A_0(\varepsilon)$ 与 u 无关。此时，

$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x,u)dx\right| \le \int_{A_1}^{A_2}|f(x,u)|dx \le \int_{A_1}^{A_2} h(x)dx<\varepsilon$，$\underset{④}{\underline{对 \forall u\in[\alpha,\beta] 恒成立}}$。

由 Cauchy 准则知：$\int_a^{+\infty} f(x,u)dx \xlongequal{一致} g(u)$，$u\in[\alpha,\beta]$.

(4).

(三) 一致收敛含参反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x,u)dx = g(u), u\in[\alpha,\beta]$

的3个分析性质定理：

性质Th1：若 $\int_a^{+\infty} f(x,u)dx \xlongequal{\text{一致}} g(u), u\in[\alpha,\beta]$，则 $g(u)$ 在

$[\alpha,\beta]$ 上连续. 即对 $\forall u_0\in[\alpha,\beta]$，有 $\lim\limits_{u\to u_0} g(u) = g(u_0)$，即

$$\lim_{u\to u_0}\int_a^{+\infty} f(x,u)dx = \int_a^{+\infty} f(x,u_0)dx = \int_a^{+\infty}\lim_{u\to u_0} f(x,u)dx \quad (\text{结}3)$$

性质Th2：若 $\int_a^{+\infty} f(x,u)dx \xlongequal{\text{一致}} g(u), u\in[\alpha,\beta]$，则 $g(u)$ 在

$[\alpha,\beta]$ 上可积，且

$$\int_\alpha^\beta g(u)du = \int_\alpha^\beta\left(\int_a^{+\infty} f(x,u)dx\right)du = \int_a^{+\infty}\left(\int_\alpha^\beta f(x,u)du\right)dx \quad (\text{结}4)$$

性质Th3：若 $f(x,u)$，$\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}$ 在 $D\begin{cases} a\le x< +\infty \\ \alpha\le u\le\beta\end{cases}$ 中皆连续.

且 $\int_a^{+\infty} f(x,u)dx \xlongequal{\text{逐点}} g(u)$，$\int_a^{+\infty}\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}dx \xlongequal{\text{一致}} h(u), u\in[\alpha,\beta]$.

则 $$g'(u) = \left(\int_a^{+\infty} f(x,u)dx\right)'_u = \int_a^{+\infty}\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}dx, \ \forall u\in[\alpha,\beta]. \quad (\text{结}5)$$

(结3)，(结4)，(结5) 表明，当反常积分一致收敛时，积分号与求极限号、积分号与积分号、积分号与求导(含微分)号分别可以交换顺序。

(5).

证Th3：设 $g_n(u)=\int_{a+n-1}^{a+n} f(x,u)dx$，$n=1,2,3,\cdots$

则 $\int_{a+n-1}^{a+n} f(x,u)dx$ 每一个都是含参正常积分. 由含参正常

积分的分析性质知：$g_n'(u)=\int_{a+n-1}^{a+n}\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}dx$，$n=1,2,3,\cdots$

且 $\sum_{n=1}^{\infty}g_n(u)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{a+n-1}^{a+n}f(x,u)dx=\int_a^{+\infty}f(x,u)dx\xlongequal{\text{逐点}}g(u)$，$u\in[\alpha,\beta]$.

$\sum_{n=1}^{\infty}g_n'(u)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{a+n-1}^{a+n}\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}dx=\int_a^{+\infty}\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}dx\xlongequal{\text{一致}}h(u)$，$u\in[\alpha,\beta]$

由一致收敛的函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}g_n(u)$ 的分析性质知：

$\left(\sum_{n=1}^{\infty}g_n(u)\right)_u'=\sum_{n=1}^{\infty}g_n'(u)\Leftrightarrow\int_a^{+\infty}\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}dx=\left(\int_a^{+\infty}f(x,u)dx\right)_u'$

或 $\left(\int_a^{+\infty}f(x,u)dx\right)_u'=\int_a^{+\infty}\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}dx$，$\forall u\in[\alpha,\beta]$.

注：如果将上面讨论中的参变量取值范围从有限区间 $[\alpha,\beta]$ 改为无穷区间 $[\alpha,+\infty)$ 或 $(-\infty,+\infty)$ 或 $(-\infty,\beta]$，则性质Th1、Th3的结论不变。但此时若要性质Th2的结论保持不变，则需要更多的条件。详情可参阅课本P324定理13.30的条件。

(6).

(四) 例题:

例1. 设含参变量 x 的反常积分 $\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt \triangleq I$

(1) 证明这个反常积分的收敛域为 $(0,+\infty)$, 即 $x\in(0,+\infty)$;

(2). 令 $\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$, $x\in(0,+\infty)$, 证明 $\Gamma(x)$ 在

$(0,+\infty)$ 中连续且在 $(0,+\infty)$ 中内闭一致收敛, 即对

$\forall [a,b]\subset(0,+\infty)$, $\Gamma(x)$ 在 $[a,b]$ 中一致收敛。

(3). $\Gamma(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 中处处可导, 且

$$\Gamma'(x)=\left(\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt\right)'_x=\int_0^{+\infty}\left(t^{x-1}e^{-t}\right)'_x dt=\int_0^{+\infty} t^{x-1}\ln t\, e^{-t}dt$$

(4). $\Gamma(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 中处处 n 阶可导, 且

$$\left(\Gamma(x)\right)^{(n)}=\int_0^{+\infty} t^{x-1}(\ln t)^n e^{-t}dt,\ n=1,2,3,\cdots \Leftrightarrow \Gamma(x)\in C^{\infty}(0,+\infty)$$

证(1): ∵ $\cancel{x}-1<0$ 时, $t=0$ 是瑕点, ∴应分别考虑

$\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$ 与 $\int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ 的收敛域, 然后求公共收敛域。

(i). 在 $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$ 中, $f(t,x)=t^{x-1}e^{-t}\geq 0$ 且 $\lim\limits_{t\to0^+} t^{x-1}e^{-t}\Big/\frac{1}{t^{1-x}}$

(7).

$=\lim\limits_{t\to 0^+} e^{-t}=1$ 且 $\int_0^1 \frac{dt}{t^{1-x}}$ 当 $1-x<1$ 即 $x>0$ 时收敛.

故当 $x>0$ 时, $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$ 也收敛.

(2°). 在 $\int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ 中, $f(t,x)=t^{x-1}e^{-t}$ 恒正连续, 且

$\lim\limits_{t\to+\infty} t^{x-1}e^{-t}/\frac{1}{t^2}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{t^{x+1}}{e^t}=0$ 且 $\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^2}$ 收敛. 由比较

原则的极限形式可知, $\int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ 对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$ 都收敛。

综合(1°), (2°) 可知, 含参数常积分 $\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ 的收敛域

为 $(0,+\infty)$. 因此, 勒让德(Legendre)建议, 设

$$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt,\quad x\in(0,+\infty) \qquad (\text{*6}).$$

证(2). (1°) 先证明 $\Gamma(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 中内闭一致收敛; (2°) 再证

$\Gamma(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 中处处连续。

(1°) 对 $\forall [a,b]\subset(0,+\infty)$, 对于 $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$ 而言, 有

$|t^{x-1}e^{-t}|\le t^{a-1}e^{-t}$, $\forall x\in[a,b]$, $\forall t\in(0,1]$ 且 从 $a>0$ 知

$\int_0^1 t^{a-1}e^{-t}dt$ 收敛. 利用维氏的优积分判法, 反常含参

(8)

积分 $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$ 在 $[a,b]$ 中一致收敛；对于 $\int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ 来说，有 $|t^{x-1}e^{-t}| \le t^{b-1}e^{-t}$，$\forall x\in[a,b]$，$\forall t\ge1$，且 $\int_1^{+\infty} t^{b-1}e^{-t}dt$ 收敛。利用优积分判定，知含参广义积分 $\int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ 在 $[a,b]$ 中一致收敛。即 $\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ 在 $[a,b]$ 中一致收敛。由 $[a,b]$ 在 $(0,+\infty)$ 中的任意性即得：$\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ 在其收敛域 $(0,+\infty)$ 中是内闭一致收敛的。

证(2°)．设 x_0 是 $(0,+\infty)$ 中的任一点，则 $x_0>0$，此时，必有 $[a,b]\subset(0,+\infty)$，使 $x_0\in(a,b)$，已证得 $\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ 在 $[a,b]$ 中一致收敛且 $f(t,x)=t^{x-1}e^{-t}$ 在 $[a,b]$ 中连续。由一致收敛的分析性质Th1，$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ 在 $[a,b]$ 中处处连续，从而在 x_0 处连续。再从 x_0 在 $(0,+\infty)$ 中的任意性可知，$\Gamma(x)$ 在整个收敛域 $(0,+\infty)$ 中处处连续。

证(3)．要证 $\Gamma(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 中处处可导，只要证 $\Gamma(x)$ 在 $(0,+\infty)$

(9).

中的任一点 x_0 处可导即可。此时，$x_0>0$，必有 $[a,b]\subset(0,+\infty)$，

使 $x_0\in(a,b)$. 对于 $\forall x\in[a,b]$，$\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$ 本身瑕点收敛于

$\Gamma(x)$，且 $\int_0^1 (t^{x-1}e^{-t})'_x dt=\int_0^1 t^{x-1}(\ln t)e^{-t}dt$ 中，当 $x\in[a,b]$ 时，

有：$\left|t^{x-1}(\ln t)e^{-t}\right|\le t^{a-1}(-\ln t)$，$\forall a\le x\le b$，$\forall t\in(0,1]$，且

$\lim\limits_{t\to0^+} t^{a-1}(-\ln t)\Big/\frac{1}{t^{1-\frac{a}{2}}}=\lim\limits_{t\to0^+}\frac{(-\ln t)}{t^{-\frac{a}{2}}}=0$，且 $\int_0^1\frac{dt}{t^{1-\frac{a}{2}}}$ 中

$\because 1-\frac{a}{2}<1$ 故 $\int_0^1\frac{dt}{t^{1-\frac{a}{2}}}$ 收敛 $\Longrightarrow \lim\limits_{t\to0^+} t^{a-1}(-\ln t)\Big/\frac{1}{t^{1-\frac{a}{2}}}=0$ 表明

$\int_0^1 t^{a-1}(-\ln t)dt$ 收敛。从优积分判别法知，$\int_0^1(t^{x-1}e^{-t})'_x dt$

在 $[a,b]$ 中一致收敛。对于 $\int_1^{+\infty}(t^{x-1}e^{-t})'_x dt$ 而言，有

$\left|t^{x-1}\ln t\, e^{-t}\right|\le t^{b-1}(\ln t)e^{-t}$，$\forall x\in[a,b]$，$\forall t\ge1$，且

$\lim\limits_{t\to+\infty} t^{b-1}(\ln t)e^{-t}\Big/\frac{1}{t^2}=\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\frac{t^{b+1}}{e^{\frac{1}{2}t}}\times\frac{\ln t}{e^{\frac{1}{2}t}}\right)=0\cdot0=0$

且 $\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^2}$ 收敛 $\Rightarrow\int_1^{+\infty}t^{b-1}(\ln t)e^{-t}dt$ 收敛且

$\int_1^{+\infty}t^{b-1}(\ln t)e^{-t}dt$ 是 $\int_1^{+\infty}(t^{x-1}e^{-t})'_x dt$ 的优积分。故

$\int_1^{+\infty}(t^{x-1}e^{-t})'_x dt$ 在 $[a,b]$ 中一致收敛。于是，$\int_0^{+\infty}(t^{x-1}e^{-t})'_x dt$

在$[a,b]$中一致收敛。从而$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}dt$在$[a,b]$中可导（性质Th3）。由$x_0\in(a,b)$知，$\Gamma(x)$在$x_0$处可导。再由$x_0$在$(0,+\infty)$中的任意性可知，$\Gamma(x)$在$(0,+\infty)$中处处可导。

例2，讨论$\int_0^{+\infty}\frac{x\sin x^3}{1+x^\alpha}dx$，（$\alpha\geq0$是参变量）的一致收敛性。

解：令$f(x,\alpha)=x\sin x^3$，$h(x,\alpha)=\frac{1}{1+x^\alpha}$，$\begin{cases}x\geq0\\ \alpha\geq0\end{cases}$.

则(i)$\int_0^{+\infty}f(x,\alpha)dx=\int_0^{+\infty}x\sin x^3dx\ \xlongequal[dx=\frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}du]{x^3=u}\ \frac{1}{3}\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u^{\frac{1}{3}}}du$

$=\frac{1}{3}\left(\int_0^1\frac{\sin u}{u^{\frac{1}{3}}}du+\int_1^{+\infty}\frac{\sin u}{u^{\frac{1}{3}}}du\right)$，且从$\lim\limits_{u\to0^+}\frac{\sin u}{u^{\frac{1}{3}}}=\lim\limits_{u\to0^+}\frac{u}{u^{\frac{1}{3}}}=0$

知，$\int_0^1\frac{\sin u}{u^{\frac{1}{3}}}du$是正常积分，收敛。由Dirichlet判别法知，$\int_1^{+\infty}\frac{\sin u}{u^{\frac{1}{3}}}du$收敛。故$\int_0^{+\infty}f(x,\alpha)dx=\int_0^{+\infty}x\sin x^3dx$收敛且该积分中无参变量$\alpha$，故$\int_0^{+\infty}x\sin x^3dx$在$\alpha\in[0,+\infty)$中一致收敛。此外，$h(x,\alpha)=\frac{1}{1+x^\alpha}$当$\alpha\geq0$时，关于$x$单调减，且关于参变量$\alpha$一致有界：$\left|\frac{1}{1+x^\alpha}\right|\leq M=1$.（M与$\alpha$无关！）

(ii).

依含参反常积分一致收敛的Abel判法知，$\int_0^{+\infty}\frac{x\sin x^3}{1+x^\alpha}dx$

在$\alpha\in[0,+\infty)$中一致收敛。

例3. 计算反常积分 $I=\int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-\alpha x}}{xe^x}dx$.$(\alpha>-1)$

解：$\because \frac{1-e^{-\alpha x}}{xe^x}=\int_0^\alpha e^{-(u+1)x}du$. 且$f(x,u)=e^{-(u+1)x}$在

$D:\begin{cases}0\le x<+\infty\\ \alpha\le u\le 0\end{cases}$ 在连续，并且$\int_0^{+\infty}e^{-(u+1)x}dx$ 作为含参变量u

的反常积分，满足$|f(x,u)|=|e^{-(u+1)x}|\le e^{-(\alpha+1)x}$, $\alpha\le u\le 0$

且$\int_0^{+\infty}e^{-(\alpha+1)x}dx=\frac{-e^{-(\alpha+1)x}}{\alpha+1}\Big|_0^{+\infty}\overset{\because\alpha+1>0}{=\!=\!=}0+\frac{1}{\alpha+1}$，即

$\int_0^{+\infty}e^{-(\alpha+1)x}dx$ 是 $\int_0^{+\infty}e^{-(u+1)x}dx$ 的优积分. 故依优积分

判法$\int_0^{+\infty}e^{-(u+1)x}dx$ 在 $-1<\alpha\le u\le 0$上一致收敛。由性质

Th2可知，$I=\int_0^{+\infty}(\int_0^\alpha e^{-(u+1)x}du)dx=\int_0^\alpha(\int_0^{+\infty}e^{-(u+1)x}dx)du$

$=\int_0^\alpha\frac{1}{u+1}du=\ln(u+1)\Big|_0^\alpha=\ln(\alpha+1)$。

四、作业：习题13.4 1/(1)，2/(1)，(3)，6，7/(1)，8/(1).

下一讲：几个重要的反常积分