第47讲：总复习课(二).

例1、设 $f(x)=x^2$, $x\in[0,\pi]$.

(1). 将 $f(x)$ 展成以 π 为周期的 Fourier 级数;

(2). 将 $f(x)$ 展成余弦级数与正弦级数;

(3). 指出它们的收敛情况并证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$.

解(1). $2l=T=\pi$, $\Longrightarrow l=\frac{\pi}{2}$, 对 $f(x)$ 作 $T=\pi$ 的周期开拓到 R 上的函数记作 $F(x)$, 则 区间$[a,b]$上 $F(x)$ 逐段光滑. 且

$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}F(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2dx=\frac{2}{3}\pi^2$; $n\geq 1$ 时, $a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}F(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx$

$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos 2nx\,dx=\frac{1}{n^2}$; $b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}F(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\sin 2nx\,dx$

$=-\frac{\pi}{n}$ $(n\geq 1)$. 故

$$x^2=f(x)=F(x)\Big|_{[0,\pi]}\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)$$

$$=\frac{1}{3}\pi^2+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}\cos 2nx-\frac{\pi}{n}\sin 2nx\right)=\begin{cases}x^2 & x\in(0,\pi)\\ \frac{\pi^2}{2}, & x=0\text{或}\pi.\end{cases}$$

由 Parseval 等式: $\frac{a_0^2}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f^2(x)dx\Rightarrow$

$$\frac{\left(\frac{2}{3}\pi^2\right)^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{n^2}\right)^2+\left(-\frac{\pi}{n}\right)^2\right]=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x^2)^2dx=\frac{2}{5}\pi^4$$

利用 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\left(\frac{2}{5}-\frac{2}{9}-\frac{1}{6}\right)\pi^4=\frac{\pi^4}{90}$.

解(2)/(19) 先将 $f(x)$ 偶开拓到 $[-\pi,\pi]$ 上，再作 $T=2\pi$ 的周期开拓开拓到 R 上的偶函数记作 $F(x)$. 则 $F(x)$ 在 $\forall[a,b]$ 中逐段光滑且在 R 上处处连续 $\Rightarrow b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\sin nx\,dx\equiv 0,\ (n\geq 1)$. $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2dx=\frac{2}{3}\pi^2$; $n\geq 1$ 时. $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nx\,dx=\frac{(-1)^n 4}{n^2}$

故 $x^2=f(x)=F(x)\big|_{[0,\pi]}\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 4}{n^2}\cos nx$

$\xrightarrow[\text{绝对}]{\text{处处、一致}} x^2,\ x\in[0,\pi]$.

由 Parseval 等式: $\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x^2)^2dx=\frac{2}{5}\pi^4$

$\Rightarrow \frac{2}{9}\pi^4+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n 4}{n^2}\right)^2=\frac{2}{5}\pi^4 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$;

解(2)/(20): 先将 $f(x)$ 奇开拓到 $[-\pi,\pi]$ 上，再作 $T=2\pi$ 的周期开拓到 R 上的函数记作 $F(x)$，则 $F(x)$ 在 $\forall[a,b]$ 中逐段光滑且是周期函数.

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\cos nx\,dx\equiv 0\ (n\geq 0)$; $b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\sin nx\,dx=$

$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\sin nx\,dx=\frac{2\pi}{n}(-1)^{n+1}+\frac{4}{\pi n^3}((-1)^n-1)$, $(n\geq 1)$. 故

$x^2=f(x)=F(x)\big|_{[0,\pi]}\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2\pi}{n}(-1)^{n+1}+\frac{4}{\pi n^3}((-1)^n-1)\right]\sin nx$

$=\!=\!= \begin{cases} x^2, & 0\leq x<\pi \\ 0, & x=\pi. \end{cases}$ (2).

例2. 设$2l$周期函数$f(x)$在$\forall[a,b]$中逐段光滑. 则

(1). $f(x) \sim \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right) \xlongequal{令\omega=\frac{\pi}{l}}$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega x+b_n\sin n\omega x) \xlongequal{收敛} \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2},\ \forall x\in R.$$

且 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b\frac{a_0}{2}dx+\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b(a_n\cos n\omega x+b_n\sin n\omega x)dx,\ \forall[a,b]\subset[-l,l].$

且 $\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f^2(x)dx.$

且 $f(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_ne^{in\omega x},\ c_n=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)e^{-in\omega x}dx,\ n=0,\pm1,\pm2,\cdots$

例3. 设$f(x,y)\in C$, $u(x,y)=\frac{1}{2}\int_0^x\left(\int_{\xi-x+y}^{x+y-\xi}f(\xi,\eta)d\eta\right)d\xi.$

证明: $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=f(x,y).$

证(1°). 設 $g(u)=\int_{a(u)}^{b(u)}f(x,u)dx$, $f(x,u),\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\in C(D)$, $D:\begin{matrix}\alpha\le u\le\beta\\ a\le x\le b\end{matrix}$

$a\le a(u)<b(u)\le b$. 且$a(u),b(u)$在$[\alpha,\beta]$上可导. 则有Leibniz公式:

$$g'(u)=f(b(u),u)b'(u)-f(a(u),u)a'(u)+\int_{a(u)}^{b(u)}\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}dx.$$

(2°). $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{2}\int_{x-x+y}^{x+y-x}f(x,\eta)d\eta+0+\frac{1}{2}\int_0^x[f(\xi,x+y-\xi)\cdot1-f(\xi,\xi-x+y)(-1)]d\xi$

$$=0+\frac{1}{2}\int_0^x[f(\xi,x+y-\xi)+f(\xi,\xi-x+y)]d\xi$$

(3). $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{2}[f(x,x+y-x)+f(x,x-x+y)]+0+\frac{1}{2}\int_0^x[f'_y(\xi,x+y-\xi)\cdot 1+$

$f'_y(\xi,\xi-x+y)\cdot(-1)]d\xi=f(x,y)+\frac{1}{2}\int_0^x[f'_y(\xi,x+y-\xi)-f'_y(\xi,\xi-x+y)]d\xi$

(4). $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{2}\int_0^x[f(\xi,x+y-\xi)\cdot 1-f(\xi,\xi-x+y)\cdot 1]d\xi$

$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{2}\int_0^x[f'_y(\xi,x+y-\xi)\cdot 1-f'_y(\xi,\xi-x+y)\cdot 1]d\xi$

(5). $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x,y)+\frac{1}{2}\int_0^x[f'_y(\xi,x+y-\xi)-f'_y(\xi,\xi-x+y)]d\xi-$

$\frac{1}{2}\int_0^x[f'_y(\xi,x+y-\xi)-f'_y(\xi,\xi-x+y)]d\xi=f(x,y)$，证毕.

例4. 设 $a>0,b>0,c>0$，试确定 a,b,c 的共同取值范围.

使反常积分：$F(a,b,c)=\iiint\limits_{\Omega}\frac{dxdydz}{1+x^a+y^b+z^c}$ 收敛，并

求出 $F(a,b,c)$ 的值. 其中, Ω 为第一卦限：$x>0,y>0,z>0$.

解：(1°) 令 $x^a=u^2$，$y^b=v^2$，$z^c=w^2$ 则 $x=u^{\frac{2}{a}}$，$y=v^{\frac{2}{b}}$，

$z=w^{\frac{2}{c}}\Rightarrow dxdydz=\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|dudvdw=\frac{8}{abc}u^{\frac{2}{a}-1}v^{\frac{2}{b}-1}w^{\frac{2}{c}-1}$

$dudvdw$，$\Rightarrow$

$$F(a,b,c)=\iiint\limits_{\substack{0<u<+\infty\\0<v<+\infty\\0<w<+\infty}}\frac{8}{abc}\frac{u^{\frac{2}{a}-1}v^{\frac{2}{b}-1}w^{\frac{2}{c}-1}dudvdw}{1+u^2+v^2+w^2}\ \underline{\underline{\begin{array}{l}u=\rho\sin\theta\cos\varphi\\v=\rho\sin\theta\sin\varphi\\w=\rho\cos\theta\end{array}}}$$

$$=\frac{8}{abc}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta)^{\frac{2}{a}+\frac{2}{b}-1}(\cos\theta)^{\frac{2}{c}-1}d\theta\times\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\varphi)^{\frac{2}{b}-1}(\cos\varphi)^{\frac{2}{a}-1}d\varphi\times\int_0^{+\infty}\frac{\rho^{\frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{2}{c}-1}}{1+\rho^2}d\rho$$

依 $I(\alpha,\beta)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\alpha-1}(\cos x)^{\beta-1}dx=\frac{1}{2}B(\frac{\alpha}{2},\frac{\beta}{2})$, $\alpha>0,\beta>0$, 及

$$\int_0^{+\infty}\frac{\rho^{\frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{2}{c}-1}}{1+\rho^2}d\rho\ \xlongequal[\rho=\sqrt{t}]{\rho^2=t,}\ \int_0^{+\infty}\frac{t^{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}t^{-\frac{1}{2}}}{1+t}\cdot\frac{dt}{2\sqrt{t}}$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{t^{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-1}}{1+t}dt=\frac{1}{2}B\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c},1-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\right),\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}<1$$

可知, $F(a,b,c)=\frac{8}{abc}\cdot\frac{1}{2}B\left(\frac{\frac{2}{a}+\frac{2}{b}}{2},\frac{\frac{2}{c}}{2}\right)\frac{1}{2}B\left(\frac{\frac{2}{b}}{2},\frac{\frac{2}{a}}{2}\right)\frac{1}{2}B\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c},1-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\right)$

$$=\frac{1}{abc}B\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b},\frac{1}{c}\right)B\left(\frac{1}{b},\frac{1}{a}\right)B\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c},1-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{abc}\,\frac{\cancel{\Gamma(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})}\Gamma(\frac{1}{c})}{\cancel{\Gamma(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})}}\,\frac{\Gamma(\frac{1}{b})\Gamma(\frac{1}{a})}{\cancel{\Gamma(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})}}\,\frac{\cancel{\Gamma(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})}\Gamma(1-(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}))}{\Gamma(1)}$$

$$=\frac{\Gamma(\frac{1}{a})\Gamma(\frac{1}{b})\Gamma(\frac{1}{c})\Gamma(1-(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}))}{abc}$$，只要 $0<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}<1$ 即可.

故当 $0<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}<1$ 时, 三重反常积分 $F(a,b,c)$ 收敛且

$F(a,b,c)=\Gamma(\frac{1}{a})\Gamma(\frac{1}{b})\Gamma(\frac{1}{c})\Gamma(1-(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}))/abc$.

例5. 判断下列反常积分的条件收敛性与绝对收敛性:

(1). $\int_0^{+\infty}\frac{\cos(2x+1)}{\sqrt{x}\sqrt[3]{x^2+1}}dx$;　　(2). $\int_0^{+\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{x\sqrt{x}}dx$.

解(1). $x=0$ 为瑕点, 在 $\int_0^1\frac{\cos(2x+1)}{\sqrt{x}\sqrt[3]{x^2+1}}dx$ 中, $\left|\frac{\cos(2x+1)}{\sqrt{x}\sqrt[3]{x^2+1}}\right|\le\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt[3]{x^2+1}}$

$\sim\frac{1}{\sqrt{x}}$, $(x\to0^+)$ 且 $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx$ con, 故 $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt[3]{x^2+1}}$ con.

从而 $\int_0^1 \frac{\cos(2x+1)dx}{\sqrt{x}\sqrt[3]{x^2+1}}$ 绝对con；在 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos(2x+1)}{\sqrt{x}\sqrt[3]{x^2+1}}dx$ 中，

$\left|\frac{\cos(2x+1)}{\sqrt{x}\sqrt[3]{x^2+1}}\right| \le \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt[3]{x^2+1}} \sim \frac{1}{x^{\frac{7}{6}}}$ $(x\to+\infty)$，且 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{\frac{7}{6}}}$ con.

故 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt[3]{x^2+1}}$ con，从而 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos(2x+1)dx}{\sqrt{x}\sqrt[3]{x^2+1}}$ 也绝对con.

因此，$\int_0^{+\infty}\frac{\cos(2x+1)dx}{\sqrt{x}\sqrt[3]{x^2+1}}$ 绝对收敛.

解(2)：令 $\frac{1}{x}=t$，则 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{x\sqrt{x}}dx=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt$，此时 $t=0$ 不是瑕点. $\int_0^1\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt$ 是正常积分，必收敛；而在 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt$ 中，

对 $\forall b>1$，$\left|\int_1^b \sin t\,dt\right| = |\cos 1-\cos b|\le 2$，且 $\frac{1}{\sqrt{t}}\downarrow 0$ $(t\to+\infty)$.

依Dirichlet判法，$\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt$ con，但从 $\left|\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\right|\ge\frac{\sin^2 t}{\sqrt{t}}=\frac{1-\cos 2t}{2\sqrt{t}}=\frac{1}{2\sqrt{t}}-\frac{\cos 2t}{2\sqrt{t}}$ 且 $\int_1^{+\infty}\frac{dt}{2\sqrt{t}}$ 发散，$\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2t}{2\sqrt{t}}dt$ 收敛.

可知 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 t}{\sqrt{t}}dt$ 发散 $\Rightarrow \int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\right|dt$ 发散.

因此，$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{x\sqrt{x}}dx$ 条件收敛。

注：设 $a>0,\alpha>0,\lambda>0$，则 $\int_a^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x^\lambda}dx$，$\int_a^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{x^\lambda}dx$ 当 $\lambda>1$ 时绝对con，当 $0<\lambda\le 1$ 时条件con，当 $\lambda\le 0$ 时发散。

例6. 设 $B_n(a)$：$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\le a^2$ $(a>0)$ 为n维球体.

求 $B_n(a)$ 的表面积 $S(B_n(a))$.

解：1°) 已知 $n=3$ 时，$V(B_3(a))=\frac{4}{3}\pi a^3$，$\Rightarrow \left(\frac{4}{3}\pi a^3\right)'_a=4\pi a^2$ $=S(B_3(a))$；$n=2$ 时，$V(B_2(a))=\pi a^2$，$\Rightarrow (\pi a^2)'_a=2\pi a$

已知 $V(B_n(a)) = (\sqrt{\pi}\, a)^n / \Gamma(\frac{n}{2}+1)$，$\forall n \in N^*$

且 $\frac{d(V(B_n(a)))}{da} = (\sqrt{\pi})^n n a^{n-1} / \Gamma(\frac{n}{2}+1)$，

故 n 维球体 $B_n(a)$ 的表面积 $S(B_n(a)) = (\sqrt{\pi})^n n a^{n-1} / \Gamma(\frac{n}{2}+1)$.

$n=4$ 时，$\because V(B_4(a)) = (\sqrt{\pi}\, a)^4 / \Gamma(\frac{4}{2}+1) = \pi^2 a^4/2 \Rightarrow$

$S(B_4(a)) = (\frac{\pi^2 a^4}{2})'_a = 2\pi^2 a^3$;

$n=5$ 时，$\because V(B_5(a)) = (\sqrt{\pi}\, a)^5 / \Gamma(\frac{5}{2}+1) = (\sqrt{\pi}\, a)^5 / \frac{5!!}{2^3}\sqrt{\pi}$

$S(B_5(a)) = ((\sqrt{\pi}\, a)^5 / \Gamma(\frac{5}{2}+1))'_a = 5(\sqrt{\pi})^5 a^4 / \frac{5!!}{8}\sqrt{\pi}$.

余类推。

II)、反常积分的 Dirichlet 判法：在 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 中，若对 $\forall b>a$，$|\int_a^b f(x)dx| \le M$，$(M>0)$，且 $g(x) \downarrow 0$ $(x \to +\infty)$，则 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 收敛；

III)、反常积分的 Abel 判法：在 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 中，若 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ con，且 $g(x)$ 在 $x \to +\infty$ 时单调有界，则 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 收敛；

IV) 若反常积分是瑕积分，只要将瑕积分替换成无穷限的反常积分即可同样判断。

(研究 $\int_2^{+\infty} \frac{\sin x}{x \ln x} dx$ 的收敛性，若收敛，是否绝对收敛？)