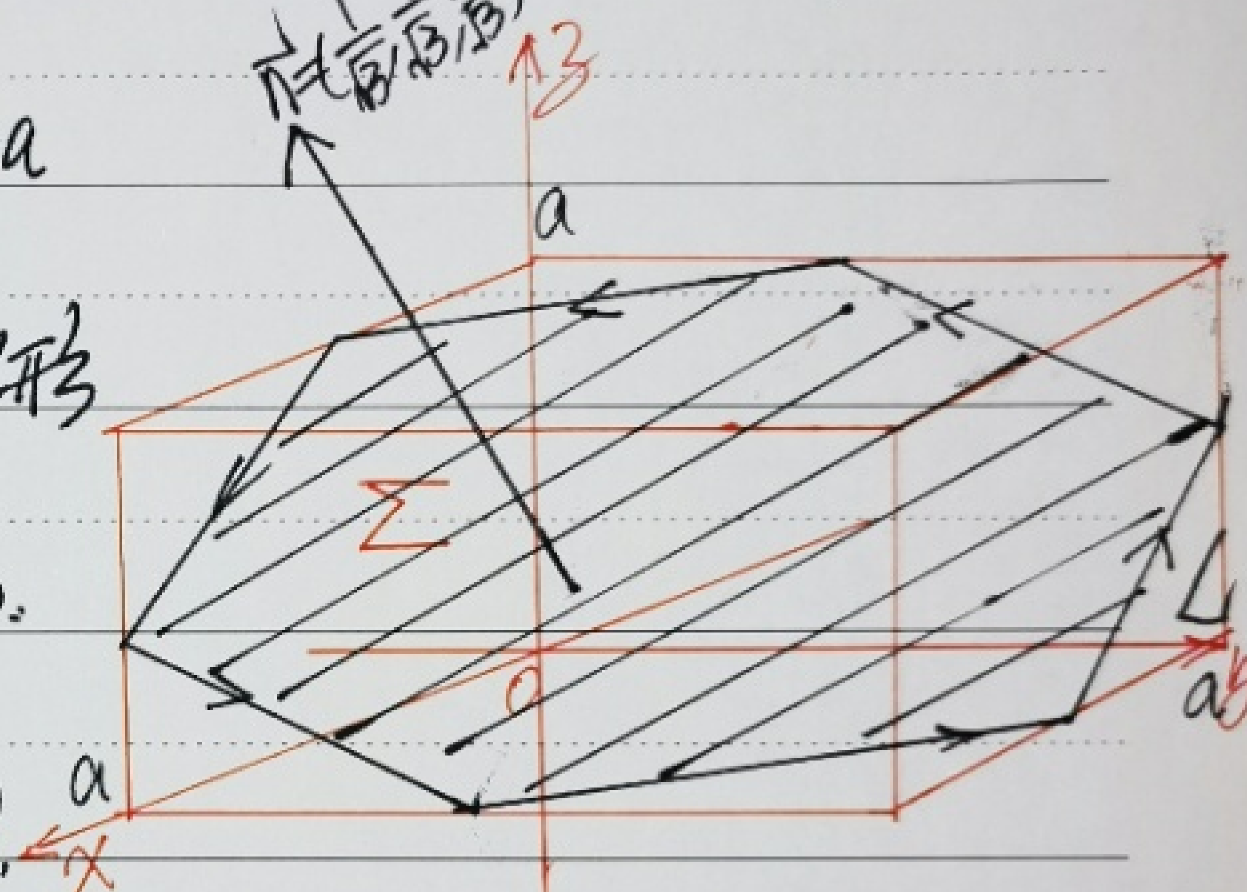
第50讲：总复习课(五).

例1. 计算曲线积分 $I=\oint_L (y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$.

L为 $x+y+z=\frac{3}{2}a$ 与立方体Ω: $0\le x\le a$, $0\le y\le a$, $0\le z\le a$

的表面$\partial\Omega$的交线，从z轴正向看，L为逆时针方向.



解：设L围的平面$x+y+z=\frac{3}{2}a$

的部分为Σ，则Σ为正六边形

区域，设Σ的单位法向量为：

$\vec{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=(\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3})$,

则L的正向与Σ的正向(侧)服从右手系.

在光滑有向曲面Σ上应用Stokes公式，其中 $\begin{cases}P=y^2-z^2\\Q=z^2-x^2\\R=x^2-y^2\end{cases}$.

则有：$I=\oint_L (y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz=\iint_\Sigma \begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}dS=$

$\iint_\Sigma \begin{vmatrix}\frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt3}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y^2-z^2 & z^2-x^2 & x^2-y^2\end{vmatrix}dS=\frac{1}{\sqrt3}\iint_\Sigma(-2y-2z-2z-2x-2x-2y)dS$

$=\frac{-4}{\sqrt3}\iint_\Sigma(x+y+z)dS=\frac{-4}{\sqrt3}\iint_\Sigma\frac{3}{2}a\,dS$

$= -\frac{4}{\sqrt3}\cdot\frac{3}{2}a\iint\limits_{\Sigma} 1dS = -\frac{6a}{\sqrt3}S(\Sigma)$，而Σ是正六边形，且边长为

$\sqrt{(\frac{a}{2})^2+(\frac{a}{2})^2}=\frac{a}{\sqrt2}$，$\Rightarrow S(\Sigma)=6\times\frac{\sqrt3}{4}(\frac{a}{\sqrt2})^2=\frac{3}{4}\sqrt3a^2 \Rightarrow$

$I=-\frac{6a}{\sqrt3}\times\frac{3}{4}\sqrt3a^2=-\frac{9}{2}a^3$.

例2. (1) a为何值时？$\vec{A}(x,y,z)=(y^2+5ay+3yz)\vec i+(5x+3axz-2)\vec j+$

$((a+2)xy-4z)\vec k$ 是有势(保守、无旋)场？

(2). 求出$\vec A(x,y,z)$的所有势(原)函数；

(3) 计算 $I=\int_{(1,2,1)}^{(2,-1,2)}(y^2+5ay+3yz)dx+(5x+3axz-2)dy+((a+2)xy-4z)dz$

解(1). 令$P=(y^2+5ay+3yz)$，$Q=5x+3axz-2$，$R=(a+2)xy-4z$，则

$P,Q,R\in C^1(R^3)$. 且R^3是曲面单连通域. 因此. $\vec A(x,y,z)$是R^3中

的有势场$\Leftrightarrow\vec A(x,y,z)$是$R^3$中的无旋场：$\nabla\times\vec A(x,y,z)\equiv0$，$\Leftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y^2+5ay+3yz & 5x+3axz-2 & (a+2)xy-4z\end{vmatrix}=((a+2)x-3ax)\vec i+(3y-(a+2)y)\vec j+(5+3az-5a-3z)\vec k$$

$\equiv0=(0,0,0)\Longrightarrow(a+2)x-3ax=0\Longrightarrow$
$(2-2a)x=0,\ \forall x\in R$

$\Rightarrow 2-2a=0\Rightarrow a=1$. 即$a=1$时. $\nabla\times\vec A(x,y,z)\equiv0$，$\forall(x,y,z)\in R^3$.

此时，$\vec A(x,y,z)=(y^2+5y+3yz)\vec i+(5x+3xz-2)\vec j+(3xy-4z)\vec k$ 为R^3中的

有势场，也是R^3中的保守场与无旋场。

解(2) 当$a=1$时，令$g(x,y,z)=\int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)}(x^2+5y+3yz)dx+(5x+3xz-2)dy+(3xy-4z)dz$ ⇒ 则

$$g(x,y,z)=\int_0^x(x^2+0+0)dx+\int_0^y(5x+3x\cdot0-2)dy+\int_0^z(3xy-4z)dz$$

$=\frac{1}{3}x^3+5xy-2y+3xyz-2z^2$，故$\vec{A}(x,y,z)$在$R^3$中的所有势函数为：

$g(x,y,z)+C=\frac{1}{3}x^3+5xy-2y+3xyz-2z^2+C$，$C$为任意常数。

解(3). $I\xlongequal{a=1时}\int_{(1,2,1)}^{(2,-1,2)}(x^2+5y+3yz)dx+(5x+3xz-2)dy+(3xy-4z)dz=$

$=\int_{(1,2,1)}^{(2,-1,2)}dg(x,y,z)=g(x,y,z)\Big|_{(1,2,1)}^{(2,-1,2)}=g(2,-1,2)-g(1,2,1)$

$=[\frac{1}{3}\times2^3+5\times2\times(-1)-2(-1)+3\times2\times(-1)\times2-2\times2^2]-[\frac{1}{3}\times1^3+5\times1\times2-2\times2+3\times1\times2\times1-2\times1^2]$

$=\frac{7}{3}-38=-\frac{107}{3}$.

例3. 求$I=\iint_\Sigma x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$，$\Sigma$为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$，

$z\geq0$的上侧，($a>0$, $b>0$, $c>0$，常数)。

解法(一)：三合一算法：

由Σ：$F(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0 \Rightarrow \vec{n}=\nabla F/|\nabla F|=$

$(F_x,F_y,F_z)/\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}=\left(\frac{2x}{a^2\sqrt{\ }},\frac{2y}{b^2\sqrt{\ }},\frac{2z}{c^2\sqrt{\ }}\right)=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$.

$\Rightarrow \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}=\frac{xc^2}{za^2}$，$\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}=\frac{yc^2}{zb^2}$，$\Rightarrow$

$I=\iint\limits_{\Sigma}(P\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}+Q\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}+R)dxdy=\iint\limits_{\Sigma}(x^2\cdot\frac{xc^2}{za^2}+y^2\cdot\frac{yc^2}{zb^2}+z^2)dxdy$

$\Sigma: z=c\sqrt{1-(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})}$ $\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le1}\left(\frac{x^3c^2}{a^2c\sqrt{\ }}+\frac{y^3c^2}{b^2c\sqrt{\ }}+\left(c\sqrt{1-(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})}\right)^2\right)dxdy$

$=0+0+c^2\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le1}(1-(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}))dxdy \xlongequal[y=br\sin\theta]{x=ar\cos\theta} c^2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(1-r^2)abr\,dr$

$=\frac{\pi}{2}abc^2$.

解法㈢：补面：$\Sigma_0:\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le1\\ z=0\end{cases}$ 且$\vec{n}=-k=(0,0,-1)$.

则由$I=\iint\limits_{\Sigma}x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_0}x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy-$

$\iint\limits_{\Sigma_0}x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$，由Gauss公式：

$\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_0}x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy=\iiint\limits_{\Omega}2(x+y+z)dxdydz$，$\Omega$为上半椭

球体：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le1$，$z\ge0$．$\Omega$关于$x$轴，$y$轴都呈对称.

因此，$\iiint\limits_{\Omega}2x\,dV=2\iiint\limits_{\Omega}x\,dxdydz=0$，$\iiint\limits_{\Omega}2y\,dxdydz=0$，

而 $\iiint\limits_{\Omega_0} 2z\,dxdydz = \int_0^c 2z\Big(\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1-\frac{z^2}{c^2}} 1\,dxdy\Big)dz$

$= \int_0^c 2z\,\pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)dz = \frac{\pi}{2}abc^2$. (也可用广义球坐标变换计算 $\iiint\limits_{\Omega_0} 2z\,dxdydz$)

且在 $\iint\limits_{\Sigma_0} x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$ 中，$\because \Sigma_0: z=0 \Rightarrow dz=0 \Rightarrow$

$dydz=0, dzdx=0, \Rightarrow \iint\limits_{\Sigma_0} x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy =$

$-\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1}(0+0+0^2)dxdy = 0$.

故 $I = \frac{\pi}{2}abc^2+0 = \frac{\pi}{2}abc^2$.

解法三：分项计算，偶零奇倍法：

在 $\iint\limits_{\Sigma} x^2dydz$ 中，设 $\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2$，Σ_1 为 $x=a\sqrt{1-\left(\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)}\ge 0$，

Σ_2 为 $x=-a\sqrt{1-\left(\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)}\le 0$，$\Sigma_1$ 的方向朝前，Σ_2 的方向朝后.

$I_1 \triangleq \iint\limits_{\Sigma} x^2dydz = \iint\limits_{\Sigma_1} x^2dydz + \iint\limits_{\Sigma_2} x^2dydz = (+1)\iint\limits_{\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1}\left(a\sqrt{1-\left(\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)}\right)^2dydz +$

$(-1)\iint\limits_{\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1}\left(-a\sqrt{1-\left(\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)}\right)^2dydz = 0$，同理，在 $I_2 = \iint\limits_{\Sigma} y^2dzdx$ 中，

设 $\Sigma=\Sigma_3+\Sigma_4$，$\Sigma_3: y=b\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)}\ge 0$，$\Sigma_4: z=-b\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)}<0$.

$I_2=\iint_{\Sigma} y^2 dzdx=(+1)\iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1}\left(b\sqrt{1-(\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2})}\right)^2 dzdx+(-1)\iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1}\left(-b\sqrt{1-(\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2})}\right)^2 dzdx$

$=0$，而 $I_3=\iint_{\Sigma} z^2 dxdy=(+1)\iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1}\left(c\sqrt{1-(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})}\right)^2 dxdy=\frac{\pi}{2}abc^2$.

$\therefore I=I_1+I_2+I_3=0+0+\frac{\pi}{2}abc^2=\frac{\pi}{2}abc^2$.

例4、计算 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$：$\Omega$ 的体积 $V(\Omega)$.

解：由 $\oiint_{\partial\Omega} z\,dxdy \xlongequal[\text{Gauss公式}]{P=0,Q=0,R=z} \iiint_{\Omega}(0+0+1)dV=V(\Omega)$ 知

$V(\Omega)=\oiint_{\partial\Omega} z\,dxdy$，而 $\partial\Omega$：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 可分成上半部分：

Σ_1：$z=c\sqrt{1-(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})}$ 与下半部分 Σ_2：$z=-c\sqrt{1-(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})}$

因 $\partial\Omega$ 取外侧，故 Σ_1 朝上，Σ_2 朝下，故有：

$V(\Omega)=\iint_{\Sigma_1} z\,dxdy+\iint_{\Sigma_2} z\,dxdy=(+1)\iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1} c\sqrt{1-(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})}\,dxdy+$

$(-1)\iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1}\left(-c\sqrt{1-(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})}\right)dxdy=2c\iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1}\sqrt{1-(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})}\,dxdy \xlongequal[y=br\sin\theta]{x=ar\cos\theta}$

$=2c\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\sqrt{1-r^2}\,abr\,dr$

$=2abc\cdot 2\pi\int_0^1(1-r^2)^{\frac{1}{2}}d(1-r^2)(-\frac{1}{2})=\frac{4}{3}\pi abc$.

上述例3、例4告诉我们，在重积分、第一类线(面)积分中的"偶零奇倍"这种奇偶对称性，在第二类曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy$ 中，变成了"奇零偶倍"的奇偶对称性。例如，在例3中，

对 $\forall m\in N^*$，都有 $\iint\limits_{\Sigma} x^{2m}dydz\equiv 0$，$\iint\limits_{\Sigma} x^{2m+1}dydz=$

$$\iint\limits_{\Sigma_1} x^{2m+1}dydz+\iint\limits_{\Sigma_2} x^{2m+1}dydz=(+1)\iint\limits_{\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1,z\geq 0}\left(a\sqrt{1-\left(\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)}\right)^{2m+1}dydz+$$

$$(-1)\iint\limits_{\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1,z\geq 0}\left(-a\sqrt{1-\left(\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)}\right)^{2m+1}dydz=2\iint\limits_{\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1,z\geq 0}\left(a\sqrt{1-\left(\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)}\right)^{2m+1}dydz.$$

在例4中，$V(\Omega)=\oiint\limits_{\Sigma} xdydz=\oiint\limits_{\Sigma} ydzdx=\oiint\limits_{\Sigma} zdxdy\Rightarrow$

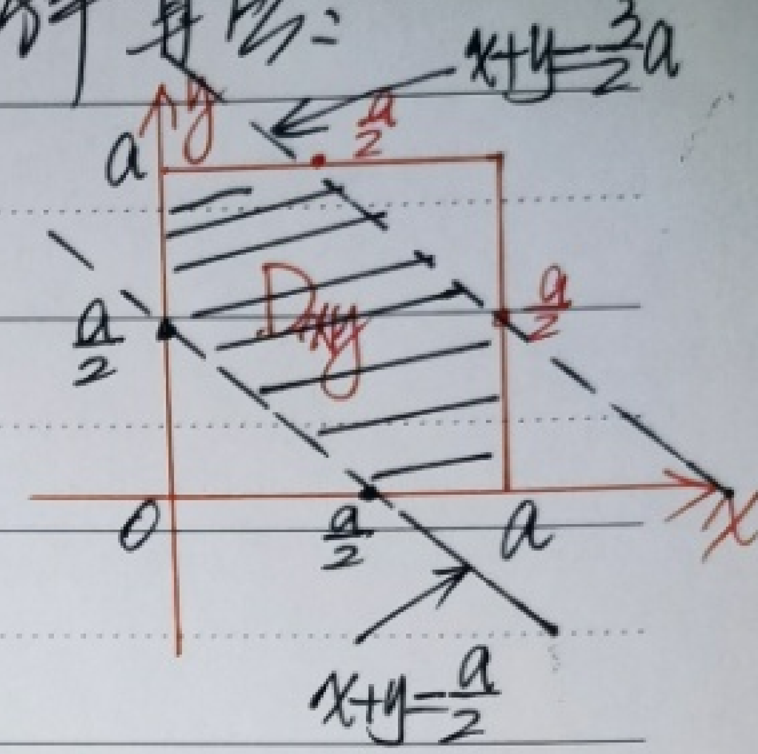
$V(\Omega)=\frac{1}{3}\oiint\limits_{\Sigma} xdydz+ydzdx+zdxdy$，且对 $\forall m\in N^*$，

$$\oiint\limits_{\Sigma} x^{2m}dydz=\iint\limits_{\Sigma_1} x^{2m}dydz+\iint\limits_{\Sigma_2} x^{2m}dydz=(+1)\iint\limits_{\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1}\left(a\sqrt{1-\left(\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)}\right)^{2m}dydz$$

$$+(-1)\iint\limits_{\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1}\left(-a\sqrt{1-\left(\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)}\right)^{2m}dydz\equiv 0$$，而 $\oiint\limits_{\Sigma} x^{2m+1}dydz=2\iint\limits_{\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1}\left(a\sqrt{1-\left(\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)}\right)^{2m+1}dydz$.

余类推。

注(1). 例1中，$S(\Sigma)=\iint\limits_{\Sigma} 1\,dS$ 的另一种算法：



设Σ在xoy平面中的投影区域为 D_{xy}，如图所示，则从

$\Sigma: z=\frac{3}{2}a-x-y \Rightarrow dS=\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy$

$=\sqrt{1+1+1}\,dxdy=\sqrt{3}\,dxdy \Rightarrow$

$$S(\Sigma)=\iint\limits_{\Sigma} dS=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{3}\,dxdy=\sqrt{3}\,S(D_{xy})=\sqrt{3}\left(a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2\right)=\frac{3}{4}\sqrt{3}a^2.$$

从而 $I=\frac{-4}{\sqrt{3}}\iint\limits_{\Sigma}\frac{3}{2}a\,dS=\frac{-4}{\sqrt{3}}\times\frac{3}{2}a\,S(\Sigma)=\frac{-4}{\sqrt{3}}\times\frac{3}{2}a\times\frac{3}{4}\sqrt{3}a^2=-\frac{9}{2}a^3.$

注(2). 例3中，$\iiint\limits_{\Omega} 2z\,dxdydz$ 的广义球坐标变换算法：

设 $x=ar\sin\theta\cos\varphi$, $y=br\sin\theta\sin\varphi$, $z=cr\cos\theta$，则 $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$, $\varphi\in[0,2\pi]$, $r\in[0,1]$.

$$\iiint\limits_{\Omega} 2z\,dxdydz=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1(cr\cos\theta)\,abcr^2\sin\theta\,dr$$

$$=2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta\,d\theta\right)\left(\int_0^{2\pi}1\,d\varphi\right)\left(\int_0^1 abc^2r^3\,dr\right)$$

$$=2\times\frac{1}{2}\times2\pi\times\frac{1}{4}abc^2=\frac{1}{2}\pi abc^2.$$