第52讲：Ch11~Ch13基本公式与基本定理汇总

(1). Green公式：(1°)设D是xOy平面上由分段光滑曲线围成的有界闭区域；(2°) $\vec{A}(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))\in C^1(D)$，(3°) $L=\partial D$ 是D的正向边界曲线，则：$\oint_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$.

(2). Gauss公式：(1°)设Ω是R^3中由分片光滑曲面围成的有界闭区域；(2°) $\vec{A}(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))\in C^1(\Omega)$；

(3°) $\Sigma=\partial\Omega$ 且Σ取外侧，则有：

$$\oint\!\!\!\!\oint_\Sigma Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iiint_\Omega\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz \iff$$

$$\oint\!\!\!\!\oint_\Sigma \vec{A}(x,y,z)\cdot\vec{n}\,dS=\iiint_\Omega \nabla\cdot\vec{A}(x,y,z)\,dxdydz.$$ 其中，

$$\vec{n}\,dS=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)dS=(\cos\alpha\,dS,\cos\beta\,dS,\cos\gamma\,dS)=(dydz,dzdx,dxdy)$$

称之为有向曲面元，记作 $d\vec{S}=\vec{n}\,dS$.

注(1)：经过"补边"才可利用Green公式时，需注意补上的边的方向；经过"补面"才可利用Gauss公式时，需注意补上的面的方向。

(1)

(3) Stokes公式：(1°) 设Ω是R^3中的区域；(2°) $\vec{A}(x,y,z)=(P(x,y,z),$ $Q(x,y,z),R(x,y,z))\in C^1(\Omega)$；$\Sigma$是$\Omega$中分片光滑曲面(有向)，$L=\partial\Sigma$且$L$的正向与$\Sigma$的正侧成右手系，则有：

$$\oint_L Pdx+Qdy+Rdz=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}dydz & dzdx & dxdy\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}dS$$

$$=\iint_\Sigma\nabla\times\vec{A}(x,y,z)\cdot\vec{n}\,dS\Leftrightarrow\oint_L\vec{A}(x,y,z)\cdot\vec{\tau}ds=\iint_\Sigma\nabla\times\vec{A}(x,y,z)\cdot\vec{n}dS$$

(4). 推广的N—L公式：

设Ω是R^3中的曲面单连通域，$L_{AB}\subset\Omega$，且线积分 $I=\int_{L_{AB}}Pdx+Qdy+Rdz$与积分路径无关，则

$I=F(B)-F(A)$，其中，$F(x,y,z)=\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)}Pdx+Qdy+Rdz$

$=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0,z_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y,z_0)dy+\int_{z_0}^{z}R(x,y,z)dz$. (x_0,y_0,z_0)是Ω中任意取定的点，(x,y,z)是Ω中任一点。

注(2)，设$\vec{A}(x,y,z)=(P,Q,R)$，则$rot(\vec{A})=\nabla\times\vec{A}\equiv 0=(0,0,0)$时，$\forall(x,y,z)\in\Omega$，上述线积分$I$与积分路径无关。

(2).

(5). 第一型线积分 $I=\int_{L_1+L_2} f(x,y,z)ds$ 的计算方法：

设 L_1 为光滑曲线 $r_1(t)=(x(t),y(t),z(t))\in C^1[\alpha,\beta]$；$L_2$ 为光滑曲线 $r_2(t)=(a(t),b(t),c(t))\in C^1[\beta,\lambda]$. $f(x,y,z)$ 在 L_1+L_2 上 C. 则

$$I=\int_{L_1} f(x,y,z)ds+\int_{L_2} f(x,y,z)ds=\int_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}\,dt+\int_\beta^\lambda f(a(t),b(t),c(t))\sqrt{a'(t)^2+b'(t)^2+c'(t)^2}\,dt$$

(6). 第一型曲面积分 $I=\iint_{\Sigma_1+\Sigma_2} f(x,y,z)dS$ 的计算方法：

设 Σ_1 为光滑曲面 $r_1(u,v)=(x_1(u,v),y_1(u,v),z_1(u,v))\in C^1(D_{1uv})$，$\Sigma_2$ 为光滑曲面 $r_2(u,v)=(x_2(u,v),y_2(u,v),z_2(u,v))\in C^1(D_{2uv})$，$f$ 在 $\Sigma_1+\Sigma_2$ 上 C，

则 $$I=\iint_{\Sigma_1} f(x,y,z)dS+\iint_{\Sigma_2} f(x,y,z)dS=\iint_{D_{1uv}} f(x_1(u,v),y_1(u,v),z_1(u,v))\sqrt{E_1G_1-F_1^2}\,dudv+\iint_{D_{2uv}} f(x_2(u,v),y_2(u,v),z_2(u,v))\sqrt{E_2G_2-F_2^2}\,dudv$$，其中，$E_1=|r_{1u}|^2$，$G_1=|r_{1v}|^2$，$F_1=r_{1u}\cdot r_{1v}$，$E_2=|r_{2u}|^2$，$G_2=|r_{2v}|^2$，$F_2=r_{2u}\cdot r_{2v}$

(7). 当 Σ 为显式光滑曲面 $z=z(x,y)\in C^1(D_{xy})$ 时，$I=\iint_\Sigma f(x,y,z)dS$ $$=\iint_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy$$；当 Σ 为光滑曲面：

$x=x(y,z)\in C^1(D_{yz})$时，$I=\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)ds=\iint\limits_{D_{yz}} f(x(y,z),y,z)\sqrt{1+x_y'^2+x_z'^2}$ $dydz$；当Σ为光滑曲面：$y=y(x,z)\in C^1(D_{xz})$时，

$I=\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)ds=\iint\limits_{D_{xz}} f(x,y(x,z),z)\sqrt{1+y_x'^2+y_z'^2}\,dxdz$.

(8). 第二型曲线积分 $I=\int_{L_{AB}} \vec{A}(x,y,z)\cdot\vec{\tau}ds$ 的计算方法：

其中，L_{AB}为光滑曲线 $r(t)=(x(t),y(t),z(t))\in C^1[\alpha,\beta]$，且$\begin{cases}\alpha\longleftrightarrow A\\ \beta\longleftrightarrow B\end{cases}$.

则 $I=\int_{L_{AB}}(P,Q,R)\cdot(\cos\alpha ds,\cos\beta ds,\cos\gamma ds)=\int_{L_{AB}}(P,Q,R)\cdot(dx,dy,dz)$

$=\int_{L_{AB}} Pdx+Qdy+Rdz=\int_{L_{AB}} dF(x,y,z)=F(B)-F(A)$.

其中 $F(x,y,z)=\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} Pdx+Qdy+Rdz$ 为 $\vec{A}(x,y,z)$ 的势函数。

或 $I=\int_\alpha^\beta [P(x(t),y(t),z(t))x'(t)+Q(x(t),y(t),z(t))y'(t)+R(x(t),y(t),z(t))z'(t)]dt$.

(9). 第二型曲面积分 $\Phi=\iint\limits_{\Sigma}\vec{A}(x,y,z)\cdot\vec{n}ds$ 的计算方法：

其中，$\vec{A}(x,y,z)=(P,Q,R)$，$\vec{n}=\pm\frac{r_u'\times r_v'}{|r_u'\times r_v'|}$，$ds=|r_u'\times r_v'|dudv$

$\vec{n}ds=(\cos\alpha ds,\cos\beta ds,\cos\gamma ds)=(dydz,dzdx,dxdy)$. 光滑曲面

(i). $\Sigma: r(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\in C^1(D_{uv})$

$$\Phi = \pm \iint_{D_{uv}} (P,Q,R)\cdot \frac{r'_u \times r'_v}{|r'_u\times r'_v|}\,|r'_u\times r'_v|\,du\,dv$$

$$= \pm \iint_{D_{uv}} \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} du\,dv$$，Σ的正侧取"+"，负侧取"−"，

通常，Σ的上、右、前、外侧为正侧；下、左、后、内侧为负侧。

(10) 当Σ为光滑显式曲面 $z=z(x,y)\in C^1(D_{xy})$ 时，Σ为 $r(x,y)=(x,y,z(x,y)) \Rightarrow r'_u=r'_x=(1,0,z'_x)$，$r'_v=r'_y=(0,1,z'_y)$

$$\Phi = \pm\iint_{D_{xy}} \begin{vmatrix} P & Q & R \\ 1 & 0 & z'_x \\ 0 & 1 & z'_y \end{vmatrix} dx\,dy = \pm\iint_{D_{xy}}[R(x,y,z(x,y)) - P(x,y,z(x,y))z'_x - Q(x,y,z(x,y))z'_y]\,dx\,dy$$

，Σ的上(下)侧取"+"(−)

(11) 当Σ为光滑曲面 $y=y(x,z)\in C^1(D_{xz})$ 时，Σ为 $r(x,z)=(x,y(x,z),z)$，$r'_u=r'_x=(1,y'_x,0)$，$r'_v=(0,y'_z,1)$。

$$\Phi = \pm\iint_{D_{xz}} \begin{vmatrix} P & Q & R \\ 1 & y'_x & 0 \\ 0 & y'_z & 1 \end{vmatrix} dx\,dz = \pm\iint_{D_{xz}}[P(x,y(x,z),z)y'_x + R(x,y(x,z),z)y'_z - Q(x,y(x,z),z)]\,dx\,dz$$

，Σ的右(左)侧取"+"(−)。

注(3). 当条件满足时，$\Phi = \iint_\Sigma \vec{A}\cdot\vec{n}\,dS = \iint_\Sigma (P,Q,R)\cdot(dy\,dz, dz\,dx, dx\,dy)$

(5), $= \iint_\Sigma P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy$ 也可通过Gauss公式计算。

同理，第二型曲线积分 $I=\int_L \vec{A}\cdot\vec{\tau}ds=\int_L (P,Q,R)\cdot(dx,dy,dz)$

$=\int_L Pdx+Qdy+Rdz$ 也可通过Stokes公式计算。

(12)，设 $u(x,y,z),V(x,y,z)\in C^2(\Omega)$ 且 Ω 是由 R^3 中分片光滑曲面所围成的有界闭区域，$\Sigma=\partial\Omega$，$\vec{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 是 Σ 的外法向量，则有：$\oiint_\Sigma V\frac{\partial u}{\partial n}ds=\oiint_\Sigma V(\nabla u)\cdot\vec{n}\,ds=$

$\oiint_\Sigma V(u_x',u_y',u_z')\cdot\vec{n}\,ds=\oiint_\Sigma(Vu_x',Vu_y',Vu_z')\cdot\vec{n}\,ds\overset{Gauss}{=\!=}$

$\iiint_\Omega \nabla\cdot(Vu_x',Vu_y',Vu_z')dxdydz=\iiint_\Omega(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z})\cdot(Vu_x',Vu_y',Vu_z')dxdydz$

$=\iiint_\Omega[V(u_{xx}''+u_{yy}''+u_{zz}'')+u_x'\cdot V_x'+u_y'\cdot V_y'+u_z'\cdot V_z']dxdydz$

$=\iiint_\Omega(V\Delta u+\nabla u\cdot\nabla V)dxdydz$，同理有：

$\oiint_\Sigma u\frac{\partial V}{\partial n}ds=\iiint_\Omega(u\Delta V+\nabla V\cdot\nabla u)dxdydz$，相减得三维空间中的第二Green公式：$\oiint_\Sigma(V\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial V}{\partial n})ds=\iiint_\Omega(V\Delta u-u\Delta V)dxdydz$.

其中，$\Delta u=(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2})u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$，

$\nabla u=(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z})u=(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z})=(u_x',u_y',u_z')$.

(13).

注(1) 平面内的Green第二公式为：

$$\oint_{\partial D}\left(v\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial v}{\partial n}\right)dl=\iint_D(v\Delta u-u\Delta v)dxdy,\ \Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2},\ \Delta u=(u_x,u_y).$$

(13). 设 $f(x)$ 为 $2l$ 周期函数，$(\forall l>0)$，且在 $\forall[a,b]$ 上分段光滑，

则 $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega x+b_n\sin n\omega x)\xlongequal{\text{逐点}}\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$

若 $f(x)$ 还是 R^1 上的连续函数，则

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega x+b_n\sin n\omega x)\xlongequal[\text{绝对}]{\text{一致}}f(x),\ \forall x\in R^1.$$

此时，公有Bessel不等式：

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\leq\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f^2(x)dx$$

也有parseval等式：$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f^2(x)dx$.

其中，$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos n\omega x dx\ (n\geq0)$，$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin n\omega x dx\ (n\geq1)$

$\omega=\frac{\pi}{l}$，a_n,b_n 也可表示：

$$a_n=\frac{1}{l}\int_0^{2l}f(x)\cos n\omega x dx\ (n\geq0),\ b_n=\frac{1}{l}\int_0^{2l}f(x)\sin n\omega x dx\ (n\geq1)$$

(14). 设 $f(x)\in L^2[-l,l]$，则

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega x+b_n\sin n\omega x)\xlongequal{\text{平方平均}}f(x),\ \forall x\in[-l,l].$$

且有Bessel不等式：

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\leq\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f^2(x)dx$$ 及成立Parseval等式：

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f^2(x)dx.$$ 其中，$\omega=\frac{\pi}{l}$.

(15). 2l周期函数f(x)的傅氏级数的复数形式：

$$f(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n e^{in\omega x},\ \omega=\frac{\pi}{l}.$$

$$c_{\pm n}=\frac{a_n\mp b_n i}{2}=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)e^{\mp in\omega x}dx,\ n=0,1,2,3,\cdots$$

其中，$\cdots e^{-3\omega x i}, e^{-2\omega x i}, e^{-\omega x i}, 1, e^{\omega x i}, e^{2\omega x i}, e^{3\omega x i}, \cdots$

构成$[-l,l]$上的一组正交函数系.

(16). 设f(x)定义在$(-\infty,+\infty)$上且$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx<+\infty$，且$f(x)\in\forall[a,b]$中逐段光滑，则f(x)有傅氏积分表示：

$$f(x)\sim\int_{0}^{+\infty}(a(\lambda)\cos\lambda x+b(\lambda)\sin\lambda x)d\lambda\ \overline{\overline{\text{逐点}}}\ \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2},\ \forall x\in R^1$$

其中，
$$\begin{cases} a(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos\lambda x dx \\ b(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\sin\lambda x dx. \end{cases}$$

注(5)：若f(x)为R^1上的偶函数时，$b(\lambda)=0$；若f(x)为R^1上的奇函数时，$a(\lambda)=0$.

根据$\int_0^{+\infty}(a(\lambda)\cos\lambda x+b(\lambda)\sin\lambda x)d\lambda=\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$，$\forall x\in R^1$.

适当取点x_0，可得到一系列的积分结果：

$$\int_0^{+\infty}(a(\lambda)\cos\lambda x_0+b(\lambda)\sin\lambda x_0)d\lambda=\frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}.$$

(17). 设$f(x),g(x)\in L^2[-l,l]$，且$\begin{cases}f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega x+b_n\sin n\omega x)\\ g(x)\sim\frac{\alpha_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos n\omega x+\beta_n\sin n\omega x)\end{cases}$

则有

$$\frac{a_0\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\alpha_n+b_n\beta_n)=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)g(x)dx,\quad \omega=\frac{\pi}{l}.$$

且对$\forall[a,b]\subset[-l,l]$，有：

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b\frac{a_0}{2}dx+\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b(a_n\cos n\omega x+b_n\sin n\omega x)dx \quad 及$$

$$\int_a^b(c_1f(x)+c_2g(x))dx=\int_a^b\frac{c_1a_0+c_2\alpha_0}{2}dx+\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b\left((a_nc_1+\alpha_nc_2)\cos n\omega x+(c_1b_n+c_2\beta_n)\sin n\omega x\right)dx$$

(18). 傅氏变换对：

$$\begin{cases}F(\lambda)=F(f(x))=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\lambda x}dx\\ f(x)=F^{-1}(F(\lambda))=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda\end{cases}$$

要求$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$中绝对可积，在$\forall[a,b]$中逐段光滑，且在R^1上C。

(19). $f(x)$是偶函数时的傅氏变换对——余弦变换：

$$\begin{cases}F_c(\lambda)=2\int_0^{+\infty}f(x)\cos\lambda x\,dx\\ f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}F_c(\lambda)\cos\lambda x\,d\lambda\end{cases}$$，此时，$F_c(\lambda)$也是偶函数。

(19).

(20). $f(x)$是奇函数时的付氏变换——正弦变换：

$$\begin{cases} F_s(\lambda)=2\int_0^{+\infty}f(x)\sin\lambda x\,dx \\ f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}F_s(\lambda)\sin\lambda x\,d\lambda \end{cases}$$，此时，$F_s(\lambda)$也是奇函数。

(21). 设$F(f(x))=F(\lambda)$，$F(g(x))=G(\lambda)$，则付氏变换化卷积为普通乘积。

$F(f(x)*g(x))=F(\lambda)\cdot G(\lambda)\Leftrightarrow F^{-1}(F(\lambda)\cdot G(\lambda))=f(x)*g(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x-t)g(t)dt$.

(22). 若$f^{(k)}(\pm\infty)=0$，$k=0,1,2,\cdots,n-1$，则$F(f^{(n)}(x))=(i\lambda)^nF(\lambda)$

$n=1,2,3,\cdots$

(23). 付氏变换的parseval等式：$\int_{-\infty}^{+\infty}f^2(x)dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\lambda)|^2d\lambda$

其中，$f(x)$在R^1时可积且平方可积，$F(f(x))=F(\lambda)$.

(24). 设$F(f(x))=F(\lambda)$，则对$\forall\lambda_0\in R^1$，$F(f(x)e^{-i\lambda_0x})=F(\lambda+\lambda_0)$

$F(f(x)e^{i\lambda_0x})=F(\lambda-\lambda_0)$，$F(f'(x))=i\lambda F(\lambda)$.

(25). $\begin{cases}\text{第一类p-积分 } \int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p} \text{ 当}p>1\text{时收敛，当}p\le1\text{时发散.}(\forall a>0) \\ \text{第二类p-积分 } \int_a^b\frac{dx}{(x-a)^p} \text{ 当}p<1\text{时收敛，当}p\ge1\text{时发散.}\end{cases}$

(26). 设$f(x)$在$[a,+\infty)$上非负，$g(x)$在$[a,+\infty)$上恒正，若$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=A$.

(1°) $0<A<+\infty$时，$\int_a^{+\infty}f(x)dx$，$\int_a^{+\infty}g(x)dx$同敛散；

(2°).

(2°). $A=0$时. 若$\int_a^{+\infty}g(x)dx$收敛, 则$\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛;

(3°) $A=+\infty$时, 若$\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛, 则$\int_a^{+\infty}g(x)dx$收敛。

(27). 设$a>0$. 则$\int_a^{+\infty}\frac{\sin mx}{x^\lambda}dx$, $\int_a^{+\infty}\frac{\cos mx}{x^\lambda}dx$ 当$\lambda>1$时绝对收敛;

当 $0<\lambda\leq1$时条件收敛; 当 $\lambda\leq0$时发散。

(28). 设$f(x,u)$, $\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\in C(D)$, $D:\begin{cases}a\leq x\leq b\\ \alpha\leq u\leq\beta\end{cases}$, $a\leq a(u)\leq b$,

$a\leq b(u)\leq b$. 且$a(u)$, $b(u)$可导. $\forall u\in[\alpha,\beta]$. 则

$g(u)=\int_{a(u)}^{b(u)}f(x,u)dx$ 可导且有Leibniz公式:

$$g'(u)=f(b(u),u)b'(u)-f(a(u),u)a'(u)+\int_{a(u)}^{b(u)}f'_u(x,u)dx$$

(29). $\int_a^{+\infty}f(x,u)dx$在$u\in[\alpha,\beta]$上一致收敛的充要条件(Cauchy准则):

$\forall\varepsilon>0$, $\exists A(\varepsilon)>a$, $A(\varepsilon)$仅与ε有关, 对$\forall A_2>A_1>A(\varepsilon)$, $\left|\int_{A_1}^{A_2}f(x,u)dx\right|<\varepsilon$

对$\forall u\in[\alpha,\beta]$恒成立。

(30). $\int_a^{+\infty}f(x,u)dx$在$u\in[\alpha,\beta]$上一致收敛的优函数判别法(充分条件):

若 $|f(x,u)|\leq h(x)$, $\forall u\in[\alpha,\beta]$ 当x充分大时恒成立.

且$\int_a^{+\infty}h(x)dx$收敛, 则$\int_a^{+\infty}f(x,u)dx$在$[\alpha,\beta]$上绝对, 一致收敛。

(31). 在$\int_a^{+\infty}f(x,u)g(x,u)dx$中, 若对$\forall b>a$, $\left|\int_a^b f(x,u)dx\right|\leq M$, 对$\forall u\in[\alpha,\beta]$

恒成立且M与u无关, 而对$\forall u\in[\alpha,\beta]$, $g(x,u)$关于x单调一致趋于零。

则 $\int_a^{+\infty} f(x,u)g(x,u)dx$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致 con.（Dirichlet判法充分条件）

(32) 在 $\int_a^{+\infty} f(x,u)g(x,u)dx$ 中，若 $\int_a^{+\infty} f(x,u)dx$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致 con，且对 $\forall u\in[\alpha,\beta]$

$g(x,u)$ 关于 x 单调且一致有界：$|g(x,u)|\le M$，M 与 u 无关。

则 $\int_a^{+\infty} f(x,u)g(x,u)dx$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致 con.（Abel判法，充分条件）

以上(29)～(31)是含参数广义积分在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛的四种常见判别法，用得最多的是维尔斯特拉斯判法。

(33). 若 $\int_a^{+\infty} f(x,u)dx$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛于 $g(u)$：$\int_a^{+\infty} f(x,u)dx \xrightarrow{\text{一致}} g(u)$. $u\in[\alpha,\beta]$.

且 $f(x,u)$ 在 $D\begin{cases} a\le x<+\infty \\ \alpha\le u\le\beta \end{cases}$ 上 C，则 $g(u)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上 C，即对 $\forall u_0\in[\alpha,\beta]$

$\lim\limits_{u\to u_0} g(u)=g(u_0) \Longleftrightarrow \lim\limits_{u\to u_0}\int_a^{+\infty} f(x,u)dx=\int_a^{+\infty} f(x,u_0)dx=\int_a^{+\infty}\lim\limits_{u\to u_0} f(x,u)dx.$

(34). 条件同(33)，则 $g(u)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可积，且

$$\int_\alpha^\beta g(u)du=\int_\alpha^\beta\left(\int_a^{+\infty} f(x,u)dx\right)du=\int_a^{+\infty}\left(\int_\alpha^\beta f(x,u)du\right)dx.$$

(35). 若 $\int_a^{+\infty} f(x,u)dx \xrightarrow{\text{逐点}} g(u)$，$u\in[\alpha,\beta]$ 且 $\int_a^{+\infty}\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}dx$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致

收敛于 $h(u)$，则 $g(u)=\int_a^{+\infty} f(x,u)dx$ 可导，且 $g'(u)=\left(\int_a^{+\infty} f(x,u)dx\right)'_u=$

$\int_a^{+\infty}\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}dx=h(u)$，$u\in[\alpha,\beta]$

(12).

上述(33)~(35)是一致收敛含参变量积分的三个分析性质。

(36). 几个常用的反常积分:

(1°) Dirichlet积分: $I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$. $\Rightarrow$

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{x}dx=\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & (\beta>0)\\ 0, & (\beta=0)\\ -\frac{\pi}{2}, & (\beta<0)\end{cases}$$

(2°) Fresnel积分: $\int_0^{+\infty}\sin x^2dx=\int_0^{+\infty}\cos x^2dx=\sqrt{\frac{\pi}{8}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

(3°) Poisson积分: $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

(4°) Laplace积分: $I(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos\beta x}{\alpha^2+x^2}dx=\frac{\pi}{2\alpha}e^{-\alpha\beta}$ $(\alpha>0,\beta\geq 0)$.

$J(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\beta x}{\alpha^2+x^2}dx=-I'(\beta)=\frac{\pi}{2}e^{-\alpha\beta}$ $(\alpha>0,\beta>0)$.

(5°) Euler积分: $\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}dt$, $\forall x\in(0,+\infty)$.

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt\xrightarrow{t=\frac{1}{1+z}}\int_0^{+\infty}\frac{z^{x-1}dz}{(1+z)^{x+y}}=\int_0^{+\infty}\frac{z^{y-1}dz}{(1+z)^{x+y}}=B(y,x)$$
$$=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.\quad \forall x>0,y>0.$$

(6°). $\Gamma(1)=\Gamma(2)=1$, $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$, $\Gamma(n+\frac{1}{2})=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}$, $\forall n\in N^*$.

$\Gamma(n+1)=n!$, $n\in N$, $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$, $\forall x>0$.

(7°) 对 $\forall x\in(0,1)$, $B(x,1-x)=\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin x\pi}$. (余元公式)

(13).

(37) $\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ 在 $(0,+\infty)$ 中内闭一致 con. 从而在 $(0,+\infty)$ 中处处连续，且处处可微. 进一步有 $\Gamma(x)\in C^{\infty}(0,+\infty)$. 且

$$(\Gamma(x))^{(n)}=\int_0^{+\infty} t^{x-1}(\ln t)^n e^{-t}dt,\ \forall n\in N^*.$$

(38). $B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ 在第一象限 $D:\begin{cases}x>0\\y>0\end{cases}$ 中内闭一致 con. 从而在 D 中处处连续，且处处可微，且 $B(x,y)\in C^{\infty}(D)$.

(39). 设 $\alpha>0$, $\beta>0$, 且 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\alpha-1}x\cos^{\beta-1}x\,dx \xlongequal{\sin^2 x=u}$

$$\frac{1}{2}\int_0^1 u^{\frac{\alpha}{2}-1}(1-u)^{\frac{\beta}{2}-1}du=\frac{1}{2}B\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\beta}{2}\right)=\frac{1}{2}\frac{\Gamma(\frac{\alpha}{2})\Gamma(\frac{\beta}{2})}{\Gamma(\frac{\alpha+\beta}{2})}.$$

(40). 对 $\forall x>0$, $\Gamma(x)$ 有 Legendre 加倍公式:

$$\Gamma(2x)=\frac{2^{2x-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right).$$

(41). $B(x+1,y+1)=\frac{\Gamma(x+1)\Gamma(y+1)}{\Gamma(x+y+2)}=\frac{x\,y}{(x+y+1)(x+y)}B(x,y),\ \forall x>0,y>0.$

从而有 $B(m+1,n+1)=\frac{\Gamma(m+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(m+n+2)}=\frac{m!\,n!}{(m+n+1)!},\ \forall m,n\in N.$

(14).

设 D 是由分段光滑曲线围成的单连通域，$L=\partial D$，$P(x,y), Q(x,y) \in C^1(D)$，则以下命题等价：

(1). 向量场 $\vec{A}=(P(x,y),Q(x,y))$ 是 D 中的无旋场：$\mathrm{rot}(\vec{A}) = \nabla\times\vec{A} = 0i+0j+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})k \equiv 0=(0,0,0)$, $\forall(x,y)\in D$.

(2). $\frac{\partial Q}{\partial x} \equiv \frac{\partial P}{\partial y}$, $\forall (x,y)\in D$.

(3). 线积分 $\int_{L_{AB}} Pdx+Qdy$ 与路径 L_{AB} 无关：$\int_{L_{AB}} Pdx+Qdy = \int_A^B Pdx+Qdy$.

(4). 向量场 $\vec{A}$ 是 D 中的有势场，即 $\exists$ 势函数 $F(x,y)\in C^1(D)$

使 $dF(x,y)=Pdx+Qdy$. 此时 $\int_A^B Pdx+Qdy = \int_A^B dF(x,y) = F(B)-F(A)$.

(5). 向量场 $\vec{A}$ 是 D 中的梯度场，即 $\exists\, F(x,y)\in C^1(D)$ 使 $\nabla F(x,y)$

$=\vec{A}$. 即 $(F'_x, F'_y)=(P,Q) \Leftrightarrow \begin{cases} F'_x=P \\ F'_y=Q \end{cases}$

(6). ODE：$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ 在 D 中为全微分(恰当)方程.

即 $\exists\, F(x,y)\in C^1(D)$，使得 $dF(x,y)$ 恰好等于 $Pdx+Qdy$

即 $dF(x,y)=Pdx+Qdy=0$ 故 $F(x,y)\equiv C$ 为ODE的通解.

(7). $\vec{A}$ 是 D 中的保守场：即对 D 中的任意闭路径 L，恒有

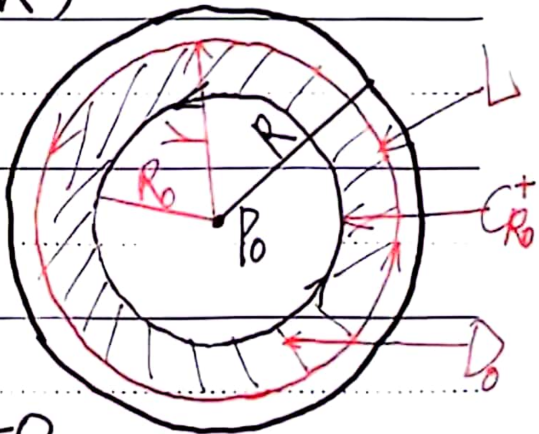
$\oint_L \vec{A}\cdot d\vec{s}=0$ 即 $\oint_L Pdx+Qdy \equiv 0$. 可推广到 R^3 中去

[illegible].

附ch11练习8、第10题的参考解答：

i) 证ch11练习8：已知 $u=f(x,y)\in C^2(\overline{B}(P_0,R))$ 且 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\Delta u=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\equiv 0$, $\forall (x,y)\in \overline{B}(P_0,R)$, 则：

$u(P_0)=f(P_0)=\frac{1}{2\pi r}\oint_L f(x,y)ds$, $P_0=(x_0,y_0)$ 为定点, $L:(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$ (正向), $\overline{B}(P_0,R):(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\le R^2$,



证：取 $v(x,y)=\ln r$, $r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}>0$, 则 $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$. 即在去掉 P_0 的区域上, v 都是调和函数, 即 $\Delta v=0$

对 $u(x,y)$, $v(x,y)$ 使用 Green 第二公式, 并且是在圆周 $C^+_{R_0}$: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R_0^2$ 与圆周 L 围成的区域 D_0 上使用 Green 第二公式：$(0<R_0<r\le R)$, (已知 u, v 都是 D_0 上的调和函数)

$$\oint_{L+C^-_{R_0}}\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds=\iint_{D_0}(u\Delta v-v\Delta u)dxdy=\iint_{D_0}(u\cdot 0-v\cdot 0)dxdy=0$$

$$\Rightarrow \oint_L\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds=-\oint_{C^-_{R_0}}\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds=\oint_{C^+_{R_0}}\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds, \quad (*) \ ①$$

注意到 $v=\ln r$，且正向圆周 L 与 $C_{R_0}^+$ 的外法向量 $\vec{n}$ 恰好是 L 与 $C_{R_0}^+$ 上点的向径 $\vec{r}$，因此 $\frac{\partial v}{\partial n}=\frac{d(\ln r)}{dr}=\frac{1}{r}$，

在 $C_{R_0}^+$ 上，$\frac{\partial v}{\partial n}=\frac{1}{r}\Big|_{r=R_0}=\frac{1}{R_0}$，$\ln r=\ln R_0$。另外，因 u,v 都是 D_0 上的调和函数，故 $\oint_{C_{R_0}^+}\frac{\partial u}{\partial n}ds=0$，$\oint_L\frac{\partial u}{\partial n}ds=0$。

此时，(*1) 左端 $\oint_{C_{R_0}^+}(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n})ds=\oint_{C_{R_0}^+}(u\frac{d\ln r}{dr}-\ln r\frac{\partial u}{\partial n})ds$

$=\oint_{C_{R_0}^+}(u\frac{1}{R_0}-\ln R_0\frac{\partial u}{\partial n})ds=\frac{1}{R_0}\oint_{C_{R_0}^+}u(x,y)ds-\ln R_0\oint_{C_{R_0}^+}\frac{\partial u}{\partial n}ds$ $=0$

$\xlongequal[\exists M_0\in C_{R_0}^+]{\text{积分中值定理}}\frac{1}{R_0}u(M_0)2\pi R_0-(\ln R_0)\cdot 0=2\pi u(M_0)$ (*1)

(*1) 右端 $=\oint_L(u\frac{d\ln r}{dr}-\ln r\frac{\partial u}{\partial n})ds\xlongequal[\text{与}\frac{1}{r}\text{为常数}]{\text{在}L\text{上}\ln r}\frac{1}{r}\oint_L u(x,y)ds-$

$\ln r\oint_L\frac{\partial u}{\partial n}ds=\frac{1}{r}\oint_L f(x,y)ds-\ln r\cdot 0=\frac{1}{r}\oint_L f(x,y)ds$，(*2)

综合 (*1)，(*2) 有 $2\pi u(M_0)=\frac{1}{r}\oint_L f(x,y)ds$ (*3)

在 (*3) 两边取 $R_0\to 0^+$ 的极限，则 $M_0\to P_0$，而 (*3) 右边与 R_0 无关是常数，极限是它本身。

(2)

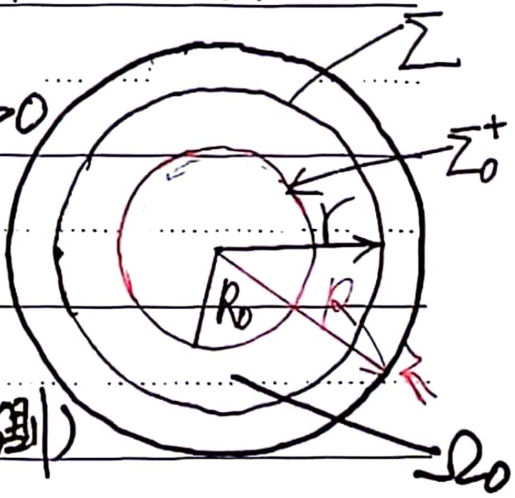
故有：$2\pi u(P_0)=\frac{1}{r}\oint_L f(x,y)ds \Rightarrow$

$u(P_0)=\frac{1}{2\pi r}\oint_L f(x,y)ds$，即 $f(P_0)=\frac{1}{2\pi r}\oint_L f(x,y)ds$.

(三) 证 Ch11 综/10：已知 $u=f(x,y,z)$ 是 $B(P_0,R):(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\le R^2$ 上的调和函数：$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$.

则有：$u(P_0)=f(P_0)=\frac{1}{4\pi r^2}\oiint_\Sigma f(x,y,z)dS$. $P_0=(x_0,y_0,z_0)$,

$\Sigma:(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$，(外侧). $0<r\le R$



(1) 取 $v(x,y,z)=\frac{1}{r}$，$r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}>0$

则 $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=0$，$(\forall r>0)$

设 $\Sigma_0^+:(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R_0^2$ (外侧)

$(0<R_0<r\le R)$. 且设 Σ_0^+ 与 Σ 围成区域 Ω_0.

则 u,v 都是 Ω_0 上的调和函数：$\Delta u=0$，$\Delta v=0$.

利用空间形式的 Green 第二公式：(在 Ω_0 上适用)

$$\oiint_{\Sigma+\Sigma_0^+}\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS=\iiint_{\Omega_0}(u\Delta v-v\Delta u)dxdydz=\iiint_{\Omega_0}(0-0)dxdydz$$
$$=0. \quad (3).$$

$$\Rightarrow \oint\!\!\oint_{\Sigma}\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS=\oint\!\!\oint_{\Sigma_0^+}\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS \qquad (*2)$$

而 $v=\frac{1}{r}$，Σ,Σ_0^+ 是球面，法向量 $\vec{n}$ 指的是向径 $\vec{r}$

$\frac{\partial v}{\partial n}=\frac{d(\frac{1}{r})}{dr}=-\frac{1}{r^2}$，在 Σ_0^+ 中 $\frac{\partial v}{\partial n}=-\frac{1}{R_0^2}$，$v=\frac{1}{R_0}$

$(*2)$ 右端 $=\oint\!\!\oint_{\Sigma_0^+}\left(u\left(-\frac{1}{R_0^2}\right)-\frac{1}{R_0}\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS=-\frac{1}{R_0^2}\oint\!\!\oint_{\Sigma_0^+}u(x,y,z)dS$

$-\frac{1}{R_0}\oint\!\!\oint_{\Sigma_0^+}\frac{\partial u}{\partial n}dS$，而 $\oint\!\!\oint_{\Sigma_0^+}\frac{\partial u}{\partial n}dS=0$，$\oint\!\!\oint_{\Sigma}\frac{\partial u}{\partial n}dS=0$ (调和函数的充要条件) 且由积分中值定理，$\exists M_0\in\Sigma_0^+$，使

$\oint\!\!\oint_{\Sigma_0^+}u(x,y,z)dS=u(M_0)\,4\pi R_0^2$，从而 $(*2)$ 右端

$=-\frac{1}{R_0^2}u(M_0)\,4\pi R_0^2-\frac{1}{R_0}\times 0=-4\pi u(M_0)$ ，$(*4)$

$(*2)$ 左端 $=\oint\!\!\oint_{\Sigma}\left(u\left(-\frac{1}{r^2}\right)-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS\xlongequal[\text{常数}]{\text{在}\Sigma\text{上},r\text{是}}-\frac{1}{r^2}\oint\!\!\oint_{\Sigma}u\,dS$

$-\frac{1}{r}\oint\!\!\oint_{\Sigma}\frac{\partial u}{\partial n}dS=-\frac{1}{r^2}\iint_{\Sigma}f(x,y,z)dS-\frac{1}{r}\cdot 0=-\frac{1}{r^2}\oint\!\!\oint_{\Sigma}f(x,y,z)dS$ $(*5)$

综合 $(*4),(*5)$：$-4\pi u(M_0)=-\frac{1}{r^2}\oint\!\!\oint_{\Sigma}f(x,y,z)dS \qquad (*6)$

$(*6)$ 两边取 $R_0\to 0^+$ 时的极限，$M_0\to P_0$，$u(M_0)\to u(P_0)$

(4)

而(左边)的左边与R_0无关，$\lim\limits_{R_0\to0^+}\left(-\frac{1}{r^2}\oiint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)dS\right)=$

$-\frac{1}{r^2}\oiint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)dS=\lim\limits_{R_0\to0^+}(-4\pi u(M_0))=-4\pi u(P_0)$

$\therefore u(P_0)=f(P_0)=\frac{1}{4\pi r^2}\oiint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)dS$

第8题表明：调和函数$u=f(x,y)$在圆心P_0的值$f(P_0)$，由$f(x,y)$在圆周L：$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$上取值的积分平均$\frac{1}{2\pi r}\oint_L f(x,y)ds$唯一确定；

第10题表明：调和函数$u=f(x,y,z)$在球心P_0的值$f(P_0)$，由$f(x,y,z)$在球面Σ：$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$上的取值的积分平均$\frac{1}{4\pi r^2}\oiint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)dS$唯一确定。

第11章、第12章、第13章的综合自测题参考答案随后会发送到QQ群中。

平面区域中最著名的调和函数$v(x,y)=\ln r$，$r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}>0$。
空间区域中最著名的调和函数$v(x,y,z)=\frac{1}{r}$，$r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}>0$