第51讲：微积分复习与小结

(一)线性性质是整个微积分学的最普遍性质，同时也是整个高等数学包括复变函数、实变函数、泛函分析、概率统计、常微分、偏微分、微分几何等学科的最普遍性质。

从单变量微积分的数列极限开始，到多变量微积分的含参变量反常积分的函数极限：

$\int_a^{+\infty} f(x,u)dx \triangleq \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x,u)dx$，微积分学中的绝大多数概念都是用极限来定义的。而极限具有线性性质：对 $\forall n\in N^*$

$$\lim_{x\to x_0}\sum_{i=1}^{n} c_i f_i(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \lim_{x\to x_0} f_i(x) \quad (式1)$$

$\lim_{x\to x_0} f_i(x)$ 存在有限且 $c_1, c_2, \cdots c_n$ 为任意常数。

(1)

正是因为函数的极限是线性性质，从而使得函数的连续、一致连续、可微、高阶可微、可积性(含广义积分)、梯度、散度、旋度、无穷级数的收敛性、反常积分的收敛性与一致收敛性、Fourier变换、Laplace变换以及各种各样的积分变换：$\int_a^b f(x)A(x,\lambda)dx \triangleq \hat{f}(\lambda)$

(其中，$A(x,\lambda)$称为积分变换的积分核，在Fourier变换中$A(x,\lambda)$取$e^{-i\lambda x}$，在Laplace变换中$A(x,\lambda)$取e^{-px}，a，b可以有限，也可以无限)与积分变换都是线性性质。梯度∇u，散度$\nabla\cdot\vec{A}$、旋度$\nabla\times\vec{A}$是线性性质是因为算子$\nabla=\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}$是微分向量算子，$\nabla$具有微分的特性与向量特性。

(2)

而微分具有线性性质。

(二) 微积分的主要内容用一句话来概括，就是"局部线性化"。

微积分由微分学与积分学两大部分组成，在微分学中，n元可微函数 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在点 $M_0(x_{10},x_{20},\cdots,x_{n0})$ 处可微的充要条件是：

$$\Delta u=f(M)-f(M_0)=A_1\Delta x_1+A_2\Delta x_2+\cdots+A_n\Delta x_n+o(\rho) \quad (\text{式}2)$$

其中，$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是与 $\Delta x_1,\cdots,\Delta x_n$ 无关的常数，且 $\rho=((\Delta x_1)^2+(\Delta x_2)^2+\cdots+(\Delta x_n)^2)^{\frac{1}{2}}$，当 ρ 较小时，

$$\begin{aligned}\Delta u\approx du&=A_1\Delta x_1+A_2\Delta x_2+\cdots+A_n\Delta x_n\\&=A_1(x_1-x_{10})+A_2(x_2-x_{20})+\cdots+A_n(x_n-x_{n0}) \quad (\text{式}3)\end{aligned}$$

这里，全微分 du 是 $x_1,x_2,\cdots x_n$ 的线性函数。

(式3) 表明，在可微条件下，在局部范围内，Δu 可以

可以线性化。

在积分学中，一切曲面积分，包括作为特例的二重积分——平面上的曲面积分，都可以看作是"局部用切平面代替曲面"的结果。正因为如此，才提出了曲面积分中，曲面须是分片光滑的，只有光滑曲面才处处有切平面。而一切曲线积分，包括作为特例的定积分——直线段上的曲线积分，都可以看作是"局部用切线代替曲线"的结果。同样为了保证曲线处处有切线而提出了，在曲线积分，曲线须是分段光滑的，只有光滑曲线才处处有切线。

而切平面方程是线性方程，切线方程是线性方程组。再由重积分都可化为定积分与二重积分可知，

无论是微分学，还是积分学，关键之处都是采用"局部线性化"的处理方法进行简化计算。

(三)、从极坐标变换到广义stokes公式：

$$\int_{\partial\Omega}\omega = \int_{\Omega} d\omega \qquad (式4)$$

(1). 在极坐标变换 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ 中，一方面有：

$$dxdy = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| drd\theta = rdrd\theta \qquad (式5)$$

另一方面，由微分的乘法运算又有：

$$dxdy = (\cos\theta dr - r\sin\theta d\theta)(\sin\theta dr + r\cos\theta d\theta)$$

$$= \cos\theta\sin\theta drdr - r^2\sin\theta\cos\theta d\theta d\theta + r\cos^2\theta drd\theta + (-r\sin^2\theta d\theta dr) \qquad (式6)$$

只有当 $drdr = d\theta d\theta = 0$, $d\theta dr = -drd\theta$ 时，(式5),(式6)的右边才会相等，反之不然。

(5).

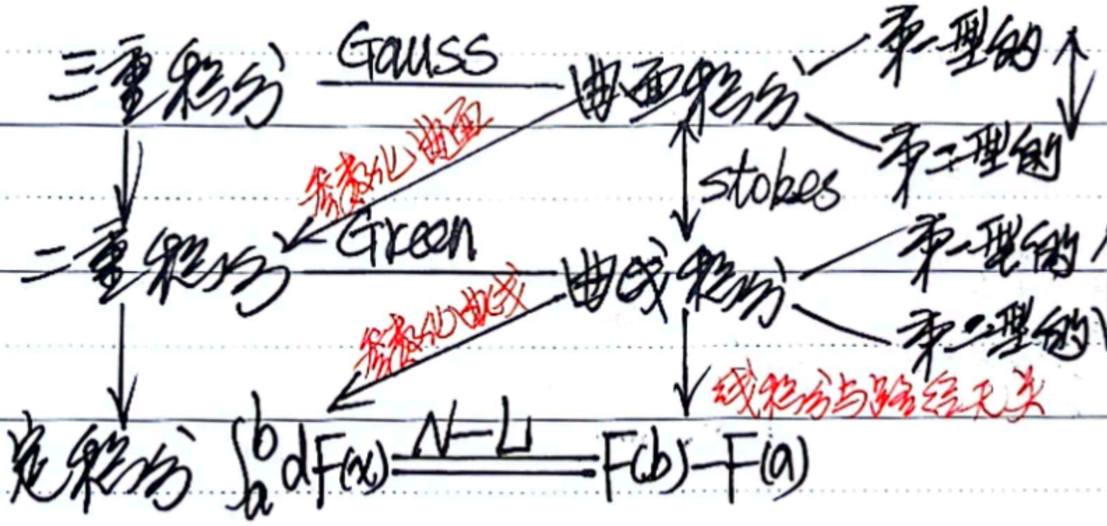
而相同的量相乘为零，交换顺序就相差一个负号

恰好是向量的外积 $\vec{a}\times\vec{b}$ 具有的性质，因此

向量的微分之积必须看作是外积，否则，(5)

(6)的左边就不可能相等。

(2). 从积分关系图到广义的Stokes公式：



$$\int_A^B Pdx+Qdy+Rdz \xlongequal[\text{则有势函数 } F(x,y,z)]{\text{若线积分与路径无关}} \int_A^B dF(x,y,z)=F(B)-F(A)$$

现在利用微分的外积，将上图中的"四大"公式：

(I). Green公式：$\oint_{\partial D} Pdx+Qdy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$

(6)

(II) Gauss公式：

$$\oiint_{\partial\Omega} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iiint_{\Omega}(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dxdydz$$

(III) 狭义的Stokes公式：

$$\oint_{\partial\Sigma} Pdx+Qdy+Rdz=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

(IV) N—L公式：$\int_a^b dF(x)=F(b)-F(a)$

统一版本公式：$\int_{\partial\Omega} \omega=\int_{\Omega} d\omega$.

证(I). 令 $\omega=Pdx+Qdy$，则两边取全微分得

$d\omega=dPdx+dQdy=(P'_xdx+P'_ydy)dx+(Q'_xdx+Q'_ydy)dy$

$=0+P'_ydydx+Q'_xdxdy+0=(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy$.

再设 $\Omega=D$，则 $\partial\Omega=\partial D$. 于是从(I)可得 Green公式为

$\int_{\partial\Omega} \omega=\int_{\Omega} d\omega$.

(7).

证(II)：令 $\omega = Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$，两边取外微分：

$$d\omega = dPdydz + dQdzdx + dRdxdy = (P'_x dx + P'_y dy + P'_z dz)dydz + (Q'_x dx + Q'_y dy + Q'_z dz)dzdx + (R'_x dx + R'_y dy + R'_z dz)dxdy$$

$$= P'_x dxdydz + 0 + 0 + 0 + Q'_y dydzdx + 0 + 0 + 0 + R'_z dzdxdy$$

$$= \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz$$，于是Gauss公式改为：

$$\int_{\partial\Omega} \omega = \int_{\Omega} d\omega.$$

证(III)：令 $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$，两边取外微分：

$$d\omega = dPdx + dQdy + dRdz = (P'_x dx + P'_y dy + P'_z dz)dx + (Q'_x dx + Q'_y dy + Q'_z dz)dy + (R'_x dx + R'_y dy + R'_z dz)dz = (R'_y - Q'_z)dydz + (P'_z - R'_x)dzdx + (Q'_x - P'_y)dxdy = \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

代入得来公式stokes公式为：$\int_{\partial\Omega} \omega = \int_{\Omega} d\omega$.

其中，$\Omega = \Sigma$，$\partial\Omega = \partial\Sigma$.

证(IV)：取 $\Omega = [a,b]$，$\omega = F(x)$，则 $d\omega = dF(x)$.

则N—L公式：$F(b)-F(a)=F(x)\big|_a^b=\int_a^b dF(x)$ 可表示为

$$\int_{\partial\Omega}\omega=F(x)\big|_a^b=\int_{\Omega}d\omega=\int_{[a,b]}dF(x)=\int_a^b dF(x).$$

于是，用广义的Stokes公式 $\int_{\partial\Omega}\omega=\int_{\Omega}d\omega$ 统一了"四大"公式。因为"四大"公式表述的内容是整个微积分的最核心，最基本的内容，因此，整个微积分如果想用一个公式来概括，那就是广义的Stokes公式。这个公式的强大威力在于在n维欧氏空间中（$n>4$），它仍然成立。

(四). 二阶连续可微函数 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在驻点 $M_0(x_{10},x_{20},\cdots,x_{n0})$ 处有极值的充分条件的统一表示。

从 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在 M_0 处的二阶Taylor公式：

$$f(M)=f(M_0)+\frac{1}{2}(x_1-x_{10})(x_2-x_{20})\cdots(x_n-x_{n0})H(M_0)\begin{pmatrix}x_1-x_{10}\\x_2-x_{20}\\\vdots\\x_n-x_{n0}\end{pmatrix}+o(\rho^2)$$

其中，$M=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$H(M_0)=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\Big|_{M_0}\right)_{n\times n}$，

(9). (注：已知 $\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_{M_0}=0$，$i=1,2,\cdots,n$)

$H(M_0)$是$f(x_1,\cdots,x_n)$在驻点M_0处的n阶Hessian（海森）矩阵，从$f\in C^2$知$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{M_0}=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\right|_{M_0}$

即$H(M_0)$是对称矩阵。当$H(M_0)$是正定矩阵时，记作$H(M_0)>0$．此时，$f(M)-f(M_0)\geq 0$在M_0的某邻域中恒成立，即$f(M_0)$为f的一个极小值；当$H(M_0)$是负定矩阵时，记作$H(M_0)<0$，此时，$f(M)-f(M_0)\leq 0$在M_0的某邻域中恒成立，即$f(M_0)$为f的一个极大值。

在一元的二阶连续可微函数$f(x)$中，若$f'(x_0)=0$，$f''(x_0)\neq 0$，则$f(x_0)$必为极值，且当$f''(x_0)>0$时$f(x_0)$为极小值，$f''(x_0)<0$时，$f(x_0)$为极大值。此时，$H(x_0)=(f''(x_0))=f''(x_0)$且$f''(x_0)>0$时，$H(x_0)$为正定矩阵，$f''(x_0)<0$时，$H(x_0)$为

负定矩阵。因此，f 在驻点 M_0 处的海森矩阵 $H(M_0)$ 正(负)定，是 f 在 M_0 处取极小(大)值的充分条件的统一表示。

(五)、证明：

(I) 在极坐标变换下：$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ 化为：

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0 \Leftrightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0，\text{(式7)}$$

(II) 在球坐标变换：$x=r\sin\theta\cos\varphi$，$y=r\sin\theta\sin\varphi$，$z=r\cos\theta$ 下，$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$ 可化为：

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}=0，\text{(式8)}$$

证(I)：$\because \begin{cases} u'_r=u'_x\cdot x'_r+u'_y\cdot y'_r=u'_x\cos\theta+u'_y\sin\theta \\ u'_\theta=u'_x\cdot x'_\theta+u'_y\cdot y'_\theta=u'_x(-r\sin\theta)+u'_y(r\cos\theta) \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} u''_{rr}=u''_{xx}\cos^2\theta+u''_{xy}\cos\theta\sin\theta+u''_{yy}\sin^2\theta+u''_{yx}\sin\theta\cos\theta \\ u''_{\theta\theta}=u''_{xx}(-r\sin\theta)^2+u''_{xy}(-r\sin\theta)(r\cos\theta)+u''_{yy}(r\cos\theta)^2+u''_{yx}(r\cos\theta)(-r\sin\theta) \end{cases}$$

(II)

$\Rightarrow r^2 u''_{rr} + u''_{\theta\theta} = u''_{xx} + u''_{yy} - (xu'_x + yu'_y)$

而以 $u'_r = u'_x\cos\theta + u'_y\sin\theta \Leftrightarrow r u'_r = u'_x(r\cos\theta) + u'_y(r\sin\theta) =$

$xu'_x + yu'_y$，即得：

$0 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + r\frac{\partial u}{\partial r}$，再在两侧同除以 r^2 得：

$\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$

注：在(I)中还有：$\begin{cases} u'_x = u'_r \cdot r_x + u'_\theta \theta'_x = u'_r\frac{x}{r} + u'_\theta(\frac{-y}{r^2}) \\ u'_y = u'_r \cdot r_y + u'_\theta \theta_y = u'_r\frac{y}{r} + u'_\theta(\frac{x}{r^2}) = \sin\theta u'_r + \frac{\cos\theta}{r}u'_\theta \end{cases}$，(*)

$(\because r = \sqrt{x^2+y^2},\ \theta = \arctan\frac{y}{x})$

其中，$u'_y = \sin\theta\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$ 在下面的证明中要用到。

证(II)：(1°) 先作柱坐标变换：$x = R\cos\varphi,\ y = R\sin\varphi,\ z = z$.

则 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial R} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial R^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$，(☆2)

(2°) 再作变换：$z = r\cos\theta,\ R = r\sin\theta,\ \varphi = \varphi$，则

$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial R^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$，而这时的 $\frac{\partial u}{\partial R}$ 相当于

(*)式的 u'_y，即 $\frac{\partial u}{\partial R} = \sin\theta\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$，将这些都代入(☆2)

(12).

$$\frac{1}{r\sin\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=0\Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\right)+\left(\frac{1}{r^2}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\theta}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0$$

刚才证的证明中，将球坐标变换 $\begin{cases}x=r\sin\theta\cos\varphi\\ y=r\sin\theta\sin\varphi\\ z=r\cos\theta\end{cases}$

化成 $\begin{cases}x=R\cos\varphi\\ y=R\sin\varphi\\ z=z\end{cases}$ 与 $\begin{cases}z=r\cos\theta\\ R=r\sin\theta\\ \varphi=\varphi\end{cases}$ 这两个柱坐标变换

的复合我们还是第一次遇到。

在《数学物理方程》中，(如1)，(如8)两式是经常使用的结果，希望大家掌握这里的证明方法。

六) Green 第一公式与 Green 第二公式：

I). 设 Ω 是 R^3 中的有界闭区域，$u(x,y,z)$，$v(x,y,z)\in C^2(\Omega)$，

$\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$，$\Delta=\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$，则有

(13).

$$\oiint_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial n}ds=\iiint_{\Omega}(\nabla u\cdot\nabla v+u\Delta v)dxdydz. \quad (\text{式}9)$$

$$\oiint_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds=\iiint_{\Omega}(u\Delta v-v\Delta u)dxdydz, \quad (\text{式}10).$$

其中$\frac{\partial u}{\partial n}$，$\frac{\partial v}{\partial n}$是$u$，$v$关于曲面$\partial\Omega$的外法单位向量的方向导数。

(式9)，(式10)分别称为三维空间中的Green第一，第二公式。在数学物理方法中用途比较多。

证(式9)：$\because$ 左边 $=\oiint_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial n}ds=\oiint_{\partial\Omega} u\nabla v\cdot\vec{n}ds$

$=\oiint_{\partial\Omega} u(v_x',v_y',v_z')\cdot\vec{n}ds=\oiint_{\partial\Omega}(uv_x',uv_y',uv_z')\cdot\vec{n}ds$

$\xlongequal[Q=uv_y',\ R=uv_z']{\text{Gauss公式}:\ P=uv_x'}\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial(uv_x')}{\partial x}+\frac{\partial(uv_y')}{\partial y}+\frac{\partial(uv_z')}{\partial z}\right)dxdydz$

$=\iiint_{\Omega}[u_x'\cdot v_x'+u_y'\cdot v_y'+u_z'\cdot v_z'+u(v_{xx}''+v_{yy}''+v_{zz}'')]dxdydz$

$=\iiint_{\Omega}(\nabla u\cdot\nabla v+u\Delta v)dxdydz=$ 右边. $\therefore$ (式9)成立.

证(式10)：在(式9)中，交换u，v的位置得：

(14).

$$\oiint_{\partial\Omega} V\frac{\partial u}{\partial n}dS = \iiint_{\Omega}(\nabla V\cdot\nabla u + V\Delta u)\,dxdydz \qquad (*11)$$

(*9)−(*11) 即得(*10)成立。

二维平面中的Green第一、第二公式分别为:

$$\oint_{\partial D} u\frac{\partial v}{\partial n}dl = \iint_{D}(\nabla u\cdot\nabla v + u\Delta v)\,dxdy \qquad (*12)$$

$$\oint_{\partial D}\left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)dl = \iint_{D}(u\Delta v - v\Delta u)\,dxdy \qquad (*13)$$

其中,$u(x,y), v(x,y)\in C^2(D)$, $\nabla=(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y})$, $\Delta=\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$

$\frac{\partial u}{\partial n}, \frac{\partial v}{\partial n}$ 是u,v关于曲线∂D的外法向量$\vec{n}$的方向导数。

用普通的Green公式: $\oint_{\partial D} Pdx+Qdy = \iint_{D}(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy$

就可以证明(*12),进而可证(*13)成立。

(6). 分析积分中的两种连续与三种收敛。

(I) 以一元函数 $y=f(x)$ 为例,两种连续指$f(x)$在区间I中逐点连续与一致连续。

(1°) $f(x)$ 在区间 I 中连续指的就是 $f(x)$ 在 I 中逐点连续。即对 $\forall x_0 \in I$，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta(\varepsilon, x_0) > 0$，当 $x \in I$ 且 $|x - x_0| < \delta(\varepsilon, x_0)$ 时，$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ 成立。由于区间 I 中的点 x_0 无穷多，因此，对应的 $\delta(\varepsilon, x_0)$ 也有无穷多个。

(2°) 如果已知 $f(x)$ 在区间 I 中逐点连续，且在上述那些无穷多个 $\delta(\varepsilon, x_0)$ 中，能产生一个最小者 $\delta(\varepsilon) > 0$，这个 $\delta(\varepsilon)$ 仅与 ε 有关，对 $\forall x, x_0 \in I$，只要 $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$，就有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ 对 $\forall x_0 \in I$ 都成立。则称 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续。故一致连续是比逐点连续更强的连续，逐点连续是局部的一个个的连续，而一致连续则是表示 $f(x)$ 在区间 I 上的整体性质，$\delta(\varepsilon) > 0$ 是对整个区间 I 上的每一点 x_0 都适用的指标。

比较特别的是，凡在闭区间 $[a, b]$ 上逐点连续的

函数 $f(x)$，都在 $[a,b]$ 上一致连续。因此，在有界闭区域(间)上逐点连续与一致连续可看作是等价的。

(II) 以函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) = S(x)$，$x \in I$ 为例，3种收敛，分别指 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 在区间 I 中逐点收敛于和函数 $S(x)$，即对 $\forall x_0 \in I$，$\lim_{n\to\infty} S_n(x_0) = S(x_0)$，其中 $S_n(x_0) = a_1(x_0) + a_2(x_0) + \cdots + a_n(x_0)$，$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon, x_0) \in N^*$，对 $\forall n > N(\varepsilon, x_0)$，有 $|S_n(x_0) - S(x_0)| < \varepsilon$ 成立。由于点 $x_0 \in I$ 中无穷多，因此对应的 $N(\varepsilon, x_0)$ 也无穷多。

如果在 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 在 I 上逐点收敛的基础上，上述的那无穷多个 $N(\varepsilon, x_0)$ 中能产生一个"最大者" $N(\varepsilon)$，此 $N(\varepsilon)$ 仅与 ε 有关，与 x_0 无关！一旦 $n > N(\varepsilon)$ 成立，则 $|S_n(x_0) - S(x_0)| < \varepsilon$ 能对区间 I 中的所有点 x_0 成立。则称函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛于和函数 $S(x)$。

(III).

若$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$在区间I上的"个别点"处不收敛于$S(x)$，但在I中的其它点处都收敛于$S(x)$，即关系式：

$\lim_{n\to\infty}S_n(x_0)=S(x_0)$ 仅对个别的x_0不成立，此时，

如明：$\lim_{n\to\infty}\int_I[S_n(x)-S(x)]^2dx=0$，$\forall x\in I$.

这时，称部分和$S_n(x)$在区间I上平方平均收敛于$S(x)$。

即$S_n(x)$在I上平方平均收敛于$S(x)$是指$S_n(x)$在I中几乎逐点收敛于$S(x)$或基本上逐点收敛于$S(x)$。

因此，函数列$\{S_n(x)\}$在区间I中一致收敛与平方平均收敛，都是从整体上来认识与刻划收敛的；但$\{S_n(x)\}$在I中逐点收敛于$S(x)$，是一个个点来局部考察的。故一致收敛是比逐点收敛更强的收敛；而逐点收敛又是比平方平均收敛更强的收敛。

(18).

在微积分中，平方平均收敛只出现在Fourier分析中，而在后续课程如数学物理方程中，函数项级数的收敛一般都是指平方平均收敛，而不是逐点收敛更不是一致收敛。

收敛的数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$，如果将它看作函数项级数，则它在任意区间I上都是一致收敛的；函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$如果有优级数$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$：$|a_n(x)|\le b_n$，$\forall x\in I$，则$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$在区间I上不仅绝对收敛且还一致收敛。绝对收敛使$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$保持了有限项和的算术性质；如有交换律、结合律、分配律，而一致收敛又使$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$保持了有限项和的分析性质：如连续性，可积性，可微性。

函数项级数的上述各种结果，都可平行地推广到含参的反常积分中去。

(19).