第30讲：第二类的曲面积分：$\iint\limits_{\Sigma}\vec{A}(x,y,z)\cdot\overrightarrow{dS}$

(一) 概念与重要性质：

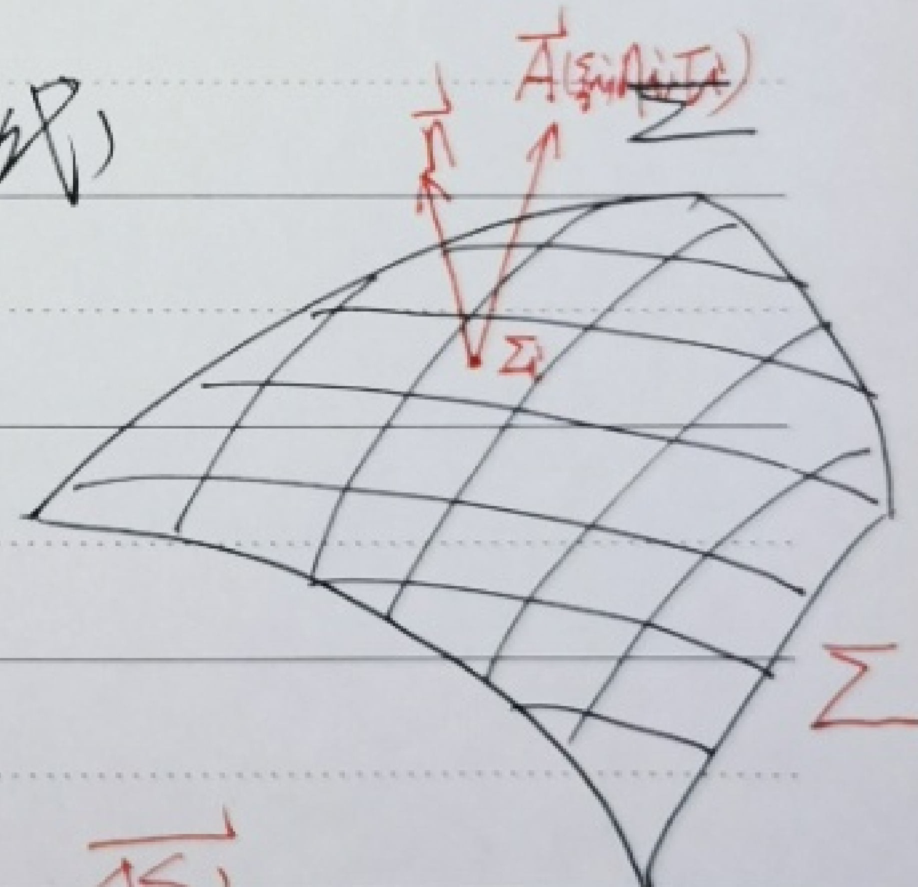
例1、设流体的流速为 $\vec{A}(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$

$\in C(\Omega)$，Ω 为区域，而有向曲面 $\Sigma\subset\Omega$ 且 Σ 为光滑曲面.

求单位时间内流体通(流)过 Σ 指定侧的通(流)量 Φ。

解题思路：局部以直代曲（与变力沿曲线做功一样，

局部变力以常力替代，曲线用直线替代）



I) 分割：$\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2+\cdots+\Sigma_i+\cdots+\Sigma_n$

且 ΔS_i 为 Σ_i 的面积（对应切平面），d_i 为 Σ_i 的直径，

$\lambda=\max\{d_1,d_2,\cdots d_n\}$，

II) 近似：作乘积：$\vec{A}(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot\underbrace{\vec{n}\,\Delta S_i}_{\overrightarrow{\Delta S_i}}$，$(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$ 为 Σ_i 中任一点.

III) 求和：$\sum\limits_{i=1}^{n}\vec{A}(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot\vec{n}\Delta S_i\approx\Phi$

IV) 极限：$\lim\limits_{\lambda\to0^+}\sum\limits_{i=1}^{n}\vec{A}(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot\vec{n}\Delta S_i\xlongequal{\text{若存在唯一}}\Phi$

$\triangleq\iint\limits_{\Sigma}\vec{A}(x,y,z)\cdot\vec{n}\,dS=\iint\limits_{\Sigma}\vec{A}(x,y,z)\cdot\overrightarrow{dS}$

其中 $\vec{dS}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)dS=(\cos\alpha dS,\cos\beta dS,\cos\gamma dS)=(dydz,dzdx,dxdy)$

称之为有向面积元。

从而 $\iint\limits_{\Sigma}\vec{A}(x,y,z)\cdot\vec{dS}=\iint\limits_{\Sigma}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$ （式1）

当 $\vec{A}(x,y,z)\in C(\Omega)$ 时，上述乘积和式的极限必存在唯一。

当 $\vec{A}(x,y,z)$ 在 Ω 中有定义，有界且上述乘积和式的极限存在且

唯一时，称 $\vec{A}(x,y,z)$ 在 Σ 中是Riemann可积函数。记作 $\vec{A}\in R(\Sigma)$

这些性质：（设 $\vec{A_1},\vec{A_2}\in R(\Sigma)$，$C_1,C_2$ 为常数）

(1) 线性性质：$\iint\limits_{\Sigma}(C_1\vec{A_1}+C_2\vec{A_2})\cdot\vec{dS}=C_1\iint\limits_{\Sigma}\vec{A_1}\cdot\vec{dS}+C_2\iint\limits_{\Sigma}\vec{A_2}\cdot\vec{dS}$

特别地：$\iint\limits_{\Sigma}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iint\limits_{\Sigma}(P,Q,R)\cdot(dydz,dzdx,dxdy)$

$=\iint\limits_{\Sigma}((P,0,0)+(0,Q,0)+(0,0,R))\cdot(dydz,dzdx,dxdy)$

$=\iint\limits_{\Sigma}(P,0,0)\cdot(dydz,dzdx,dxdy)+\iint\limits_{\Sigma}(0,Q,0)\cdot(dydz,dzdx,dxdy)+\iint\limits_{\Sigma}(0,0,R)\cdot$

$(dydz,dzdx,dxdy)=\iint\limits_{\Sigma}Pdydz+\iint\limits_{\Sigma}Qdzdx+\iint\limits_{\Sigma}Rdxdy$.

(2) $\iint\limits_{\Sigma_1+\Sigma_2}\vec{A}\cdot\vec{dS}=\iint\limits_{\Sigma_1}\vec{A}\cdot\vec{dS}+\iint\limits_{\Sigma_2}\vec{A}\cdot\vec{dS}$

(3) $\iint\limits_{\Sigma+} \vec{A}\cdot\vec{ds} = -\iint\limits_{\Sigma-} \vec{A}\cdot\vec{ds}$

(4). 当Σ是位于xoy平面中区域D且$\vec{n}=k=(0,0,1)$时，有

$z\equiv 0$，$\Rightarrow dzdx=0$，$dydz=0$．$R(x,y,z)=R(x,y,0)\triangleq f(x,y)$．

$$\iint\limits_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy = +\iint\limits_{D} R(x,y,0)dxdy = \iint\limits_{D} f(x,y)dxdy$$

即区域D上的二重积分$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy$是第二型曲面积分的特例，就像定积分$\int_a^b f(x)dx$是第二型曲线积分的特例一样。

(三) $\iint\limits_{\Sigma} \vec{A}(x,y,z)\cdot\vec{n}ds = \iint\limits_{\Sigma} \vec{A}(x,y,z)\cdot\vec{ds}$的计算方法.

设Σ为光滑有向曲面：$r(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\in C'(D_{uv})$

则 $\vec{n}=\pm\dfrac{r'_u\times r'_v}{|r'_u\times r'_v|}$，$ds=|r'_u\times r'_v|dudv=\sqrt{EG-F^2}dudv$

从而 $\vec{ds}=\vec{n}ds=\pm r'_u\times r'_v dudv$

$$\vec{A}(x,y,z)\cdot\vec{ds}=\pm\vec{A}(x,y,z)\cdot r'_u\times r'_v dudv=\pm\begin{vmatrix} P & Q & R \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix}dudv$$

$$I=\iint\limits_{\Sigma}\vec{A}\cdot\vec{ds}=\pm\iint\limits_{D_{uv}}\begin{vmatrix} P & Q & R \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix}dudv \qquad (\text{※})$$

且当Σ取上、前、右侧时，I取"+"号；Σ取下、后、左侧时，I取"−"号。（一代二投三定号） (3).

特别是当 Σ 为显式曲面 $z=z(x,y)\in C^1(D_{xy})$ 时，

$\Sigma: r(x,y)=(x,y,z(x,y)) \Rightarrow \begin{cases} r'_x=(1,0,z'_x) \\ r'_y=(0,1,z'_y) \end{cases}$

$$I=\iint_{\Sigma} \vec{A}\cdot d\vec{s}=\pm\iint_{D_{xy}} \begin{vmatrix} P & Q & R \\ 1 & 0 & z'_x \\ 0 & 1 & z'_y \end{vmatrix} dxdy$$

一代二投三定号！

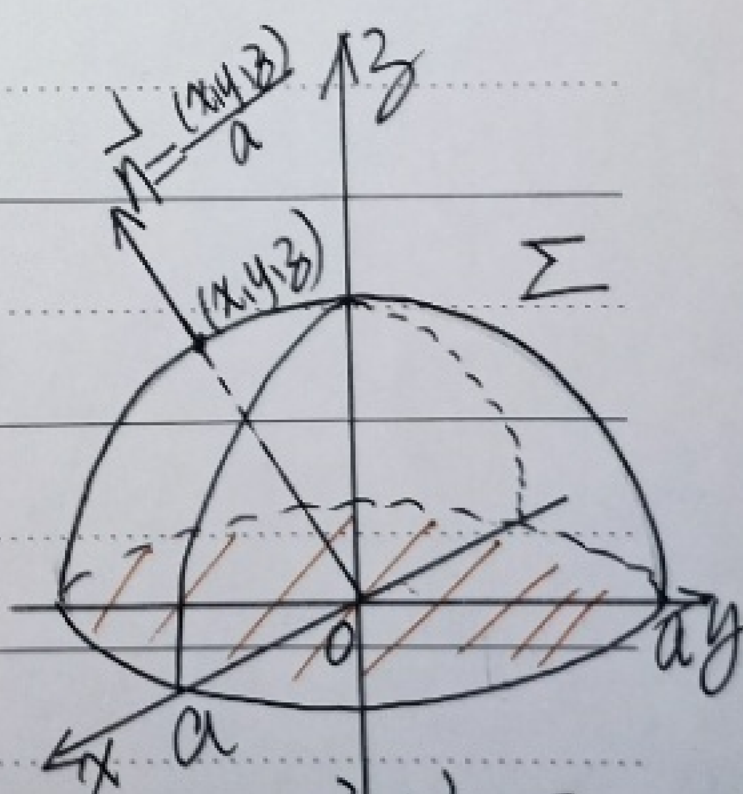
$$=\pm\iint_{D_{xy}} (R-z'_x\cdot P-z'_y Q)\,dxdy \quad (*3)$$

当 Σ 取上侧时，I 取"+"号，当 Σ 取下侧时，I 取"−"号。

例2，设 Σ 为上半球面：$x^2+y^2+z^2=a^2$ $(a>0)$ 的上侧，计算

$I=\iint_{\Sigma} x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$，即求向量场 $\vec{A}(x,y,z)=(x^2,y^2,z^2)$

通过上半球面 Σ 上侧的通量 I。



$D_{xy}: x^2+y^2\le a^2$

解法(1)：Σ 的显式表示为：

$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，$x^2+y^2\le a^2$ 且

$z'_x=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$，$z'_y=\frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$

$$I=\pm\iint_{D_{xy}}(R-z'_xP-z'_yQ)\,dxdy=+\iint_{D_{xy}}\left[a^2-x^2-y^2+\frac{x^3}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}+\frac{y^3}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\right]dxdy \quad (4).$$

利用奇偶对称性 有：$\iint\limits_{D_{xy}} \frac{x^3}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy = 0 = \iint\limits_{D_{xy}} \frac{y^3}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy$

$$I = \iint\limits_{x^2+y^2\le a^2} (a^2-x^2-y^2)dxdy \xlongequal[y=r\sin\theta]{x=r\cos\theta} \int_0^{2\pi}\left(\int_0^a (a^2-r^2)rdr\right)d\theta = \frac{\pi}{2}a^4;$$

解法(二)：Σ 的向量式为 $r(\theta,\varphi)=(a\sin\theta\cos\varphi, a\sin\theta\sin\varphi, a\cos\theta)$，$\begin{cases}\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]\\ \varphi\in[0,2\pi]\end{cases}$，

$$\Rightarrow \begin{cases} r'_\theta = (a\cos\theta\cos\varphi, a\cos\theta\sin\varphi, -a\sin\theta) = (x'_\theta, y'_\theta, z'_\theta) \\ r'_\varphi = (-a\sin\theta\sin\varphi, a\sin\theta\cos\varphi, 0) = (x'_\varphi, y'_\varphi, z'_\varphi) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x'_\theta & y'_\theta & z'_\theta \\ x'_\varphi & y'_\varphi & z'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (a\sin\theta\cos\varphi)^2 & (a\sin\theta\sin\varphi)^2 & (a\cos\theta)^2 \\ a\cos\theta\cos\varphi & a\cos\theta\sin\varphi & -a\sin\theta \\ -a\sin\theta\sin\varphi & a\sin\theta\cos\varphi & 0 \end{vmatrix}$$

$$= a^4\cos^3\theta\sin\theta + a^4\sin^4\theta(\sin^3\varphi+\cos^3\varphi)$$

$$I = +\iint\limits_{D_{\theta\varphi}} \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x'_\theta & y'_\theta & z'_\theta \\ x'_\varphi & y'_\varphi & z'_\varphi \end{vmatrix} d\theta d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\pi}(a^4\cos^3\theta\sin\theta + a^4\sin^4\theta(\sin^3\varphi+\cos^3\varphi))d\varphi$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}(a^4\cos^3\theta\sin\theta)2\pi d\theta = \frac{2\pi a^4}{-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta d\cos\theta = \frac{\pi}{2}a^4;$$

（注：$\int_0^{2\pi}\sin^{2n+1}\theta d\theta = \int_0^{2\pi}\cos^{2n+1}\theta d\theta \equiv 0, \forall n\in N$）

解法(三)：$\because \vec{A}(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2)$，$\vec{n} = \frac{(x,y,z)}{a}$

$$\therefore I = \iint\limits_{\Sigma} \vec{A}(x,y,z)\cdot\vec{n}ds = \frac{1}{a}\iint\limits_{\Sigma}(x^3+y^3+z^3)ds$$

利用第一型曲面积分的奇偶对称性有：$\iint\limits_{\Sigma} x^3 ds = \iint\limits_{\Sigma} y^3 ds = 0$，

而 $\iint\limits_{\Sigma} z^3 ds \xrightarrow[z=a\cos\theta]{\substack{x=a\sin\theta\cos\varphi \\ y=a\sin\theta\sin\varphi}} \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a\cos\theta)^3 a^2\sin\theta d\theta\right)d\varphi$

$= \frac{2\pi a^5}{-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta d\cos\theta = \frac{2\pi}{4}a^5$，$\therefore I = \frac{\pi}{2}a^4$；

解法(四)：$\because I = \iint\limits_{\Sigma} x^2 dydz + \iint\limits_{\Sigma} y^2 dzdx + \iint\limits_{\Sigma} z^2 dxdy$

而 $I_1 \triangleq \iint\limits_{\Sigma_1+\Sigma_2} x^2 dydz = \iint\limits_{\substack{\Sigma_1 \\ (x>0)}} x^2 dydz + \iint\limits_{\substack{\Sigma_2 \\ (x<0)}} x^2 dydz$

偶零奇倍

$= + \iint\limits_{y^2+z^2\le a^2, z\ge 0}\left(\sqrt{a^2-y^2-z^2}\right)^2 dydz + (-1)\iint\limits_{y^2+z^2\le a^2, (z\ge 0)}\left(-\sqrt{a^2-y^2-z^2}\right)^2 dydz = 0$

一代二投三定号

同理，$\iint\limits_{\Sigma} y^2 dzdx = 0$，而 $\iint\limits_{\Sigma} z^2 dxdy = + \iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}\left(\sqrt{a^2-x^2-y^2}\right)^2 dxdy$

$\xrightarrow[y=r\sin\theta]{x=r\cos\theta} \int_0^{2\pi}\left(\int_0^a (a^2-r^2) r dr\right)d\theta = \frac{\pi}{2}a^4$.

解法(五)：补面 Σ_0：$z=0$，$x^2+y^2\le a^2$，$\vec{n}=-\vec{k}$，再用Gauss公式。

$I = \iint\limits_{\Sigma}\vec{A}\cdot\vec{n} ds = \oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_0}\vec{A}\cdot\vec{n} ds - \iint\limits_{\Sigma_0}\vec{A}\cdot\vec{n} ds = \iiint\limits_{\Omega}(\nabla\cdot\vec{A})dV - 0$

$= \iiint\limits_{\Omega}(2x+2y+2z)dV = 0 + 0 + 2\iiint\limits_{\Omega} z dV = \frac{\pi}{2}a^4$.

三) 作业：EX11.4 / 1(1),(2),(4),(5),(6),(7)；2.

第30讲(续): 曲面Σ的定向及曲面积分的奇偶对称性

(一) 有向曲面Σ的侧由Σ的单位法向量 $\vec{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 来具体确定：若 $\cos\gamma\geq 0\ (\leq 0)$ 恒成立 则表示Σ取上侧(下侧)；

若 $\cos\beta\geq 0(\leq 0)$ 恒成立，则表示Σ取右侧(左侧)；

若 $\cos\alpha\geq 0(\leq 0)$ 恒成立 则表示Σ取前侧(后侧).

再以 $\vec{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\dfrac{\vec{r}_u\times\vec{r}_v}{|\vec{r}_u\times\vec{r}_v|}=\left.\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix}\right/|\vec{r}_u\times\vec{r}_v|$

$=\left(\dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\vec{i}+\dfrac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\vec{j}+\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\vec{k}\right)\Big/|\vec{r}_u\times\vec{r}_v|$ 知，

$\cos\gamma\geq 0(\leq 0)$ 恒成立 $\Longleftrightarrow \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\geq 0(\leq 0)$ 在 D_{uv} 上恒成立.

因此，$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\geq 0(\leq 0)$ 在 D_{uv} 上恒成立，表示Σ取上侧(下侧)

同理，$\dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\geq 0(\leq 0)$ 在 D_{uv} 上恒成立，表示Σ取前侧(后侧).

(二) 第二型曲面积分：$\iint\limits_{\Sigma}P(x,y,z)\,dydz+\iint\limits_{\Sigma}Q(x,y,z)\,dzdx+\iint\limits_{\Sigma}R(x,y,z)\,dxdy$

具有特别的性质：偶零奇倍，即

(1) 若 $P(x,y,z)$ 关于 x 是偶函数且Σ关于坐标面 $x=0$ 对称时

必有 $\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)dydz=0$，若 $P(x,y,z)$ 是 x 的奇函数且

Σ 关于 $x=0$ 坐标面对称时，$\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)dydz=2\iint\limits_{\Sigma_1} P(x,y,z)dydz$，

其中，Σ_1 是 $x\geq 0$ 部分的 Σ。

(2°) 若 $Q(x,y,z)$ 关于 y 是（偶）、（奇）函数且 Σ 关于 $y=0$ 坐标面

对称时，$\iint\limits_{\Sigma} Q(x,y,z)dzdx=0$，$(2\iint\limits_{\Sigma_2} Q(x,y,z)dzdx$，$\Sigma_2$ 是 Σ

在 $y\geq 0$ 的部分)

(3°) 若 $R(x,y,z)$ 关于 z 是偶（奇）函数且 Σ 关于 $z=0$ 坐标面

对称时，$\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy=0$，$(2\iint\limits_{\Sigma_3} R(x,y,z)dxdy$，$\Sigma_3$ 是

Σ 在 $z\geq 0$ 的部分)

只证 (1°) 即可．因 Σ 关于 $x=0$ 的坐标面对称，Σ_1 为前侧，

$\Sigma-\Sigma_1$ 为后侧．设 Σ_1 的参数表示为 $x=x(y,z)\in C(D_{yz})$

则在 $\Sigma-\Sigma_1$ 上，参数表示为 $x=-x(y,z)\in C(D_{yz})$．并且

$\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)dydz=\iint\limits_{\Sigma_1} P(x,y,z)dydz+\iint\limits_{\Sigma-\Sigma_1} P(x,y,z)dydz=$

$$(+1)\iint\limits_{D_{yz}} P(x(y,z),y,z)\,dydz+(-1)\iint\limits_{D_{yz}} P(-x(y,z),y,z)\,dydz$$

$$=\iint\limits_{D_{yz}}[P(x(y,z),y,z)-P(x(y,z),y,z)]\,dydz=\iint\limits_{D_{yz}}0\,dydz=0.$$

(通常前侧取"+"，后侧取"-"；右侧取"+"，左侧取"-"；上侧取"+"，下侧取"-")

当$P(x,y,z)$关于x是奇函数时，$P(-x(y,z),y,z)=-P(x(y,z),y,z)$

$$\iint\limits_{\Sigma}P(x,y,z)\,dydz=+\iint\limits_{D_{yz}}P(x(y,z),y,z)\,dydz+(-1)\iint\limits_{D_{yz}}[-P(x(y,z),y,z)]\,dydz$$

$$=2\iint\limits_{D_{yz}}P(x(y,z),y,z)\,dydz=2\iint\limits_{\Sigma_1}P(x,y,z)\,dydz。$$

但是，在重积分中(含定积分)及在第一型的曲面、曲线积分中，关于对称性都表现为"偶倍奇零"

利用关于对称的"偶零奇倍"法及高斯(Gauss)公式

计算课上的例3见第3讲讲稿的P_6。