

# 第十四周作业答案

于俊骞

2024年6月18日

## 习题 12.4

1

(1)

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\lambda} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-i\lambda\xi} d\xi \\ &= \frac{k}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\lambda} d\lambda \int_0^T \xi e^{-i\lambda\xi} d\xi \\ &= \frac{k}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{iT\lambda + 1}{\lambda^2} e^{-iT\lambda} - \frac{1}{\lambda^2} \right) e^{ix\lambda} d\lambda \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\lambda} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-i\lambda\xi} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\lambda} d\lambda \int_{-1}^1 \operatorname{sgn}(\xi) e^{-i\lambda\xi} d\xi \\ &= -\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda} + e^{-i\lambda} - 2}{\lambda} e^{ix\lambda} d\lambda \\ &= -\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \frac{\lambda}{2}}{\lambda} e^{ix\lambda} d\lambda \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\lambda} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-i\lambda\xi} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\lambda} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\lambda\xi}}{a^2 + \xi^2} d\xi \\ &= \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|\lambda|+ix\lambda} d\lambda \end{aligned}$$

2

(1)

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-a|x|} e^{-ix\xi} dx \\ &= \int_{-\infty}^0 x e^{(a-i\xi)x} dx + \int_0^{+\infty} x e^{-(a+i\xi)x} dx \\ &= \frac{x e^{(a-i\xi)x}}{a-i\xi} \Big|_{x=-\infty}^0 - \int_{-\infty}^0 \frac{e^{(a-i\xi)x}}{a-i\xi} dx - \frac{x e^{-(a+i\xi)x}}{a+i\xi} \Big|_{x=0}^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(a+i\xi)x}}{a+i\xi} dx \\ &= -\frac{e^{(a-i\xi)x}}{(a-i\xi)^2} \Big|_{-\infty}^0 - \frac{e^{-(a+i\xi)x}}{(a+i\xi)^2} \Big|_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{(a+i\xi)^2} - \frac{1}{(a-i\xi)^2} \\ &= -\frac{4ai\xi}{(a^2 + \xi^2)^2} \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ix\xi} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x e^{-ix\xi} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{ix(1-\xi)} dx - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-ix(1+\xi)} dx \\ &= \frac{e^{ix(1-\xi)}}{i(1-\xi)} \Big|_{x=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{e^{-ix(1+\xi)}}{i(1+\xi)} \Big|_{x=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\cos \frac{\pi}{2}\xi}{1-\xi} + \frac{\cos \frac{\pi}{2}\xi}{1+\xi} = -\frac{2 \cos \frac{\pi}{2}\xi}{1-\xi^2} \end{aligned}$$

## 习题 13.1

1

(2)

收敛。

注意到该积分无瑕点，且对于充分大的  $x > 0$ ，有

$$\sqrt{x}e^{-x} < e^{\frac{x}{2}}e^{-x} = e^{-\frac{x}{2}}$$

从而由比较判别法，该积分收敛。

(3)

发散。

注意到该积分无瑕点，且

$$\frac{x \arctan x}{\sqrt[3]{1+x^4}} \sim \frac{\pi}{2} \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}, x \rightarrow \infty$$

从而由比较判别法，该积分发散。

(6)

发散。

注意到该积分只有 1 一个瑕点，且

$$\frac{x^2}{(\sqrt[3]{1-x^2})^5} \sim \frac{2^{-\frac{5}{3}}}{(1-x)^{\frac{5}{3}}}, x \rightarrow 1^-$$

从而由比较判别法，该积分发散。

(7)

收敛。

注意到该积分只有 0 一个瑕点，且

$$\frac{1}{e^{\sqrt{x}} - 1} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}, x \rightarrow 0^+$$

从而由比较判别法，该积分收敛。

(10)

收敛。

注意到该积分只有 0 一个瑕点，且

$$\frac{\ln \sin x}{\sqrt{x}} \sim \frac{\ln x}{\sqrt{x}}, x \rightarrow 0^+$$

从而由比较判别法，直接积分可知其收敛。

(14)

(旧版书印刷错误，对应新版书的第 12 问)

注意到该积分只有 0 一个瑕点，且

$$\begin{aligned}\frac{\arctan x}{x^\mu} &\sim \frac{1}{x^{\mu-1}}, \quad x \rightarrow 0^+ \\ \frac{\arctan^\mu}{x^\mu} &\sim \frac{\pi}{2x^\mu}, \quad x \rightarrow +\infty\end{aligned}$$

由比较判别法，该积分收敛当且仅当  $1 < \mu < 2$ 。

2

(4)

注意到

$$\frac{\ln(1+x)}{x^2(1+x^p)} \sim \frac{1}{x}, \quad x \rightarrow 0^+$$

从而由比较判别法，该积分发散。

## 问题反馈

- Fourier 积分的结果应当只有一个积分号
- 特殊函数  $\frac{1}{x^2+a^2}$  的 Fourier 变换可以通过  $e^{-|x|}$  间接计算，直接计算会用到复变中的留数定理；
- 部分同学把  $x^{-p}$  的收敛性记反；
- 别漏瑕点。